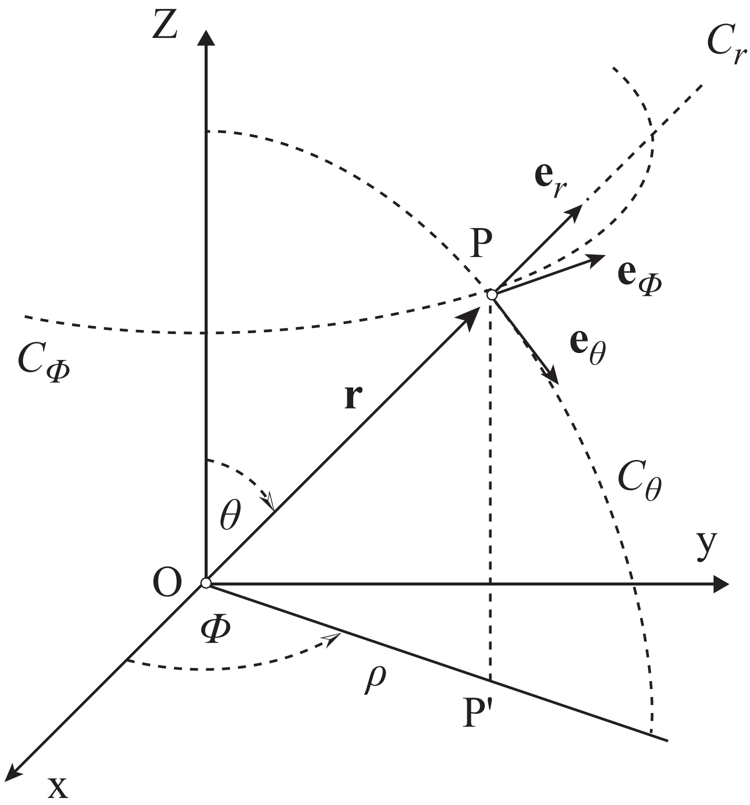
SERGIO LEONARDO GÓMEZ

VETORES COM APLICAÇÕES EM FÍSICA



Blucher

Conteúdo

Capítulo 1

Álgebra vetorial

1.1 Introdução

Para postular modelos que descrevam sistemas físicos, precisamos realizar medições de grandezas físicas, as quais podem ter diversas naturezas, mas que podem ser agrupadas segundo algumas particularidades. Existem, por exemplo, grandezas físicas que para serem completamente especificadas precisam somente de um valor e de uma unidade de medida. Por exemplo, para indicar a massa de um objeto dissemos que ela vale 2 kg, ou que o volume de um corpo é de 0,5 m^3. Outras grandezas similares, no sentido de serem indicadas só por um número e uma unidade, são a superfície de um objeto, o trabalho de uma força e a energia cinética de um corpo em movimento, por exemplo. Grandezas dessa natureza são denominadas grandezas *escalares*. Contudo, existem grandezas que necessitam de mais informações que somente um número e uma unidade de medida para serem completamente especificadas. Consideremos, por exemplo, o deslocamento de um carro num determinado intervalo de tempo. Para indicar completamente esse deslocamento, não é suficiente dizer que foi de 2 m. É necessário, também, dizer em que direção e para qual sentido (dada uma direção, temos dois sentidos possíveis) ele se deslocou. Similarmente, se um corpo sofre o efeito de uma força de 2 N, a teoria da mecânica clássica mostra que o movimento resultante da ação de tal força depende, além da sua intensidade, da direção e do sentido desta. Grandezas como o deslocamento e a força são chamadas de grandezas *vetoriais*. Outros exemplos de grandezas vetoriais são a velocidade, a aceleração e o campo elétrico. Finalmente, existem grandezas que não podem ser indicadas por um simples número com uma unidade nem por um conjunto de quatro elementos (um número, uma unidade, uma direção e um sentido), mas por um conjunto de valores dados em determinada ordem. Por exemplo, a inércia de um corpo ante as rotações depende tanto da direção em torno da qual o corpo sofre a rotação, denominado eixo de rotação, quanto da distribuição da massa em torno desse eixo. Também, as tensões de um material num determinado ponto dependem da direção que passa pelo ponto. Grandezas como a inércia e a tensão são exemplos de grandezas *tensoriais*. Outros exemplos de grandezas tensoriais são a condutividade térmica e a susceptibilidade elétrica. Essas grandezas físicas não serão discutidas nesta obra.

1.2 Reta e segmento orientado

Começaremos o estudo dos vetores mediante uma abordagem puramente geométrica. Assim, a noção de uma direção (reta) e um sentido nos remete diretamente à imagem de uma seta. Uma reta é dita *orientada* quando nela se estabelece um sentido de percurso considerado como positivo (Figura 1.1). Graficamente, o sentido positivo é indicado com uma seta. Uma reta orientada é chamada também de *eixo*.

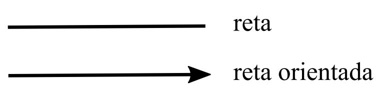


Figura 1.1 – Reta e reta orientada. A reta indica uma direção e a reta orientada, uma direção e um sentido preferencial.

Um segmento de reta é determinado por dois pontos sobre a reta. Quando os pontos são dados numa certa ordem, o segmento é dito orientado. Dados os pontos O e P, nessa ordem, eles determinam o segmento de reta orientado com origem no ponto O e extremo no ponto P. A notação para um segmento orientado é $\overline{\mathrm{OP}}$ (Figura 1.2). O segmento $\overline{\mathrm{PO}}$ é dito *segmento orientado oposto* do segmento $\overline{\mathrm{OP}}$.

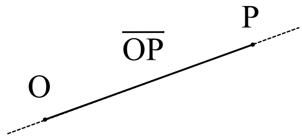


Figura 1.2 – Segmento orientado, de origem O e extremo P.

Fixada uma unidade de comprimento, denomina-se módulo do segmento $\overline{\mathrm{OP}}$ e denotamos por $\left|\overline{\mathrm{OP}}\right|$ o comprimento do segmento em termos da unidade de comprimento (u.c.) adotada (Figura 1.3).

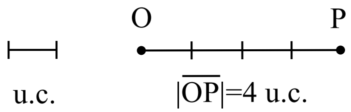


Figura 1.3 – Segmento de 4 unidades de comprimento.

- Um segmento orientado é dito *nulo* quando o seu comprimento é zero.

- Dois segmentos orientados são ditos *paralelos* se as retas que os contêm são paralelas ou coincidentes.

- Dois segmentos são ditos *equipolentes* quando têm a mesma direção, módulo e sentido, embora possam não estar sobre a mesma reta (Figura 1.4).

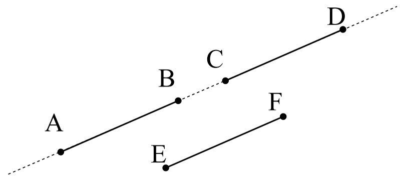


Figura 1.4 – $\overline{\mathrm{AB}}$ é um segmento orientado, e $\overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{EF}}$ são segmentos equipolentes a $\overline{\mathrm{AB}}$.

1.3 Vetor

Apresentado o conceito de segmento orientado, estamos em condições de introduzir a primeira definição de vetor.

1ª definição: Dado um segmento orientado $\overline{\mathrm{AB}}$, chama-se **vetor** à classe dos segmentos equipolentes a $\overline{\mathrm{AB}}$ e se representa por $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Qualquer segmento orientado equipolente constitui uma representação do vetor. Assim, dado um vetor, existem infinitas representações deste e, portanto, podemos formular a segunda definição de vetor.

2ª definição: Vetor é uma terna constituída de uma direção, um sentido e um número não negativo denominado módulo do vetor.

Notação: Notações usuais de vetor são uma letra em negrito ($\mathbf{v}$) e letras com uma seta na parte superior ($\vec{v}$). Nesta obra adotaremos a primeira alternativa.

No que segue, não se fará distinção entre um vetor e qualquer uma das suas representações. Graficamente, uma grandeza vetorial é representada por uma seta orientada, sendo a sua magnitude proporcional ao módulo do vetor. A direção da seta é dada pela direção da reta à qual pertence a seta (Figura 1.5).

O módulo de um vetor $\mathbf{V}$, denominado mod $\mathbf{V}$, é o comprimento do

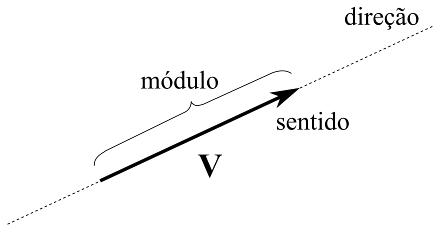


Figura 1.5 – Representação gráfica de um vetor $\mathbf{V}$.

segmento orientado. Por ser um comprimento, o módulo de um vetor é sempre um número não negativo. Outras notações do módulo são $|\mathbf{V}|$ e V.

1.3.1 Vetor nulo

Um vetor de módulo igual a zero é denominado *vetor nulo*, embora, estritamente falando, um vetor nulo seja um ponto, não sendo possível atribuir uma direção e um sentido a ele. Representamos o vetor nulo por $\mathbf{0}$.

1.3.2 Igualdade de vetores

Definição: Dois vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ditos iguais, e denota-se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ quando eles têm a mesma direção, mesmo módulo e mesmo sentido. A igualdade de vetores satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (Propriedade Reflexiva),

2. Se $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}$ (Propriedade de Simetria),

3. Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}$ (Propriedade Transitiva).

1.3.3 Vetor oposto

Dado o vetor $\mathbf{A}$, define-se o seu oposto e denota-se por $-\mathbf{A}$ o vetor de mesmo módulo e direção que $\mathbf{A}$, mas de sentido contrário (Figura 1.6).

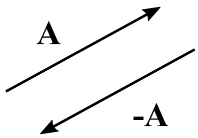


Figura 1.6 – Representação gráfica de um vetor e do seu oposto.

1.3.4 Vetores coplanares

Dois vetores não paralelos são sempre coplanares, ou seja, eles determinam um plano que contém ambos simultaneamente (Figura 1.7). Com efeito, dados dois vetores, sempre podem ser escolhidas representações de ambos os vetores com uma origem comum. Essas representações sempre definem um plano, sendo, portanto, o plano definido pelos vetores.

Em geral, três ou mais vetores não serão todos simultaneamente coplanares.

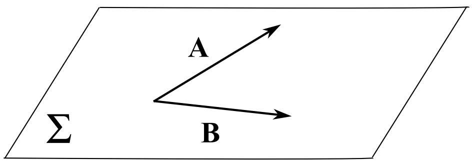


Figura 1.7 – Plano $\sum$ determinado pelos vetores **A** e **B**.

1.4 Adição de vetores

Sejam dois vetores quaisquer **A** e **B**. O vetor soma ou vetor resultante **R** dos vetores **A** e **B**, indicado por $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, é o vetor que pode ser obtido seguindo este procedimento:

Os vetores **A** e **B** são transladados paralelamente um à continuação do outro, fazendo coincidir o extremo de um com a origem do seguinte. O vetor resultante **R** será o vetor que terá a sua origem na origem do primeiro vetor (**A**) e o seu extremo no extremo do último vetor (**B**). Esse método de

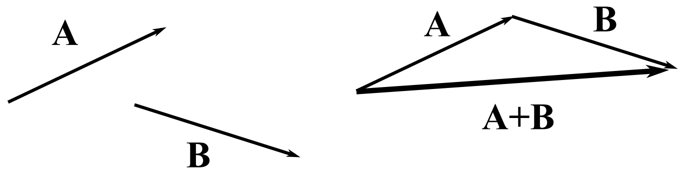


Figura 1.8 – Representação gráfica do Método da Poligonal para a obtenção da soma dos vetores **A** e **B**.

obtenção da soma de vetores é conhecido como *Método da Poligonal* (Figura 1.8).

A adição de um vetor e o seu oposto dará como resultante o vetor nulo, ou seja

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

A diferença dos vetores **A** e **B**, indicada por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, é definida como a soma de **A** e do oposto de **B** (Figura 1.9):

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \equiv \mathbf{A} + (-\mathbf{B})\,.$$

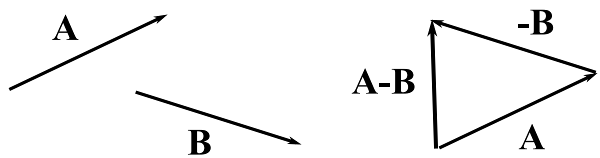


Figura 1.9 – Representação gráfica da aplicação de Método da Poligonal para a obtenção da diferença entre os vetores **A** e **B**.

1.4.1 Propriedades da soma de vetores

Sendo que os vetores **A**, **B** e **A+B** formam um triângulo, os módulos dos vetores satisfazem a seguinte relação:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|\,.$$

A soma de vetores satisfaz também as seguintes propriedades:

- Associatividade: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \equiv \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$,
- Comutatividade: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

A última propriedade indica que o vetor nulo é o elemento neutro na adição vetorial. Uma consequência da propriedade comutativa da adição de vetores é a denominada *Regra do Paralelogramo* para a obtenção da resultante de dois vetores: dados dois vetores, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, a resultante $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é dada pela diagonal do paralelogramo determinado por $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (Figura 1.10).

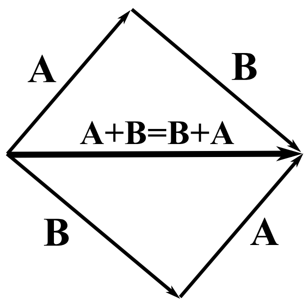


Figura 1.10 – Representação gráfica da aplicação da Regra do Paralelogramo para a obtenção da soma dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

A soma de vetores pode ser estendida para qualquer número de vetores por meio do método da poligonal. A soma dos vetores $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \ldots$ é realizada levando os vetores a coincidir o extremo de cada vetor com a origem do seguinte. O vetor soma é determinado pela origem do primeiro e o extremo do último vetor da série.

Princípio de superposição de forças

Na física, a adição de grandezas vetoriais, como as forças, é conhecida como *Princípio de Superposição*. Não constitui um resultado *a priori*, mas a

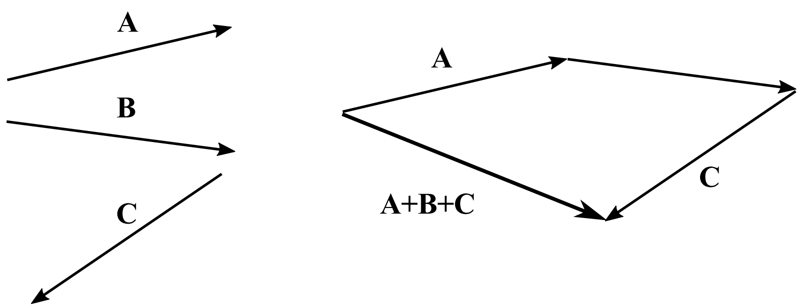


Figura 1.11 – Método da poligonal para a obtenção da resultante de um número arbitrário de vetores.

conclusão de numerosos resultados experimentais sobre o efeito da aplicação de um número arbitrário e simultâneo de forças a um corpo. Se sobre uma partícula dada atuam simultaneamente as forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, o efeito dinâmico sobre a partícula, como enunciado pela 2ª lei de Newton, é equivalente ao de uma única força, chamada *força resultante*, $\mathbf{F}_R$, dada pela soma vetorial das forças aplicadas sobre a partícula:

$$\mathbf{F}_{_R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n.$$

A força resultante é responsável pela aceleração $\mathbf{a}$ do corpo e a relação entre ambas é dada por $\mathbf{F}_{_R} = m\,\mathbf{a}$.

O Princípio de Superposição Linear é também satisfeito pelos campos elétricos e magnéticos, como consequência da linearidade das Equações de Maxwell. A superposição linear dos campos eletromagnéticos associados à luz é responsável pelos fenômenos ópticos conhecidos como *interferência* e *difração*.

1.5 Multiplicação por um escalar

Seja o vetor $\mathbf{A}$ e o escalar k. O produto de $\mathbf{A}$ pelo escalar k, indicado por $k\mathbf{A}$, é um vetor de mesma direção que $\mathbf{A}$, de módulo kA e cujo sentido será o mesmo que o de $\mathbf{A}$ se k for um número positivo, e será contrário se k for negativo (veja Figura 1.12).

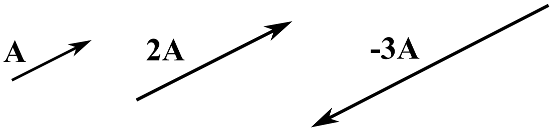


Figura 1.12 – Os vetores $2\mathbf{A}$ e $-3\mathbf{A}$ têm módulos 2 e 3, respectivamente, em unidades do módulo de $\mathbf{A}$.

1.5.1 Propriedades do produto por um escalar

Dados os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e os escalares k e l, pode-se mostrar que o produto de um vetor por um escalar tem as seguintes propriedades:

1. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$,

2. $(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$,

3. $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$,

4. $|k\mathbf{A}| = |k|\,|\mathbf{A}|$.

1.6 Versor

No caso de um vetor não nulo $\mathbf{A}$, o produto do vetor pelo inverso de seu módulo é um outro vetor, de módulo unitário, sendo denominado vetor unitário ou *versor* correspondente ao vetor $\mathbf{A}$ e indicado da seguinte forma:

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{A}}\mathbf{A}. \tag{1.1}$$

Um vetor qualquer $\mathbf{A}$ pode ser escrito em termos do seu versor correspondente e do seu módulo como

$$\mathbf{A} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{A}}. \tag{1.2}$$

Velocidade relativa

Como dissemos no começo do capítulo, a velocidade de um objeto é um exemplo típico de vetor. Sua direção e seu sentido são correspondentes aos do movimento do objeto, e o seu módulo é definido como a taxa instantânea de avanço ao longo da direção do movimento. Suponhamos que o objeto seja um barco que atravessa um rio, cuja correnteza tem uma velocidade $\mathbf{v}_{ág-s}$ em relação ao solo, que se desloca com velocidade $\mathbf{v}_{b-ág}$ em relação à água. A velocidade do barco relativa ao solo, $\mathbf{v}_{b-s}$, é dada por $\mathbf{v}_{b-s} = \mathbf{v}_{b-ág} + \mathbf{v}_{ág-s}$. Assim, se a partir de um ponto O desejamos atingir o ponto O$'$ num tempo t, a direção na qual o barco deve ser direcionado não corresponde, em geral, à do vetor $\mathbf{R} = \overline{\mathrm{OO}'}$, mas à do vetor $\mathbf{R}' = \overline{\mathrm{OP}}$ (Figura 1.13), de forma que $\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{W}$, onde $\mathbf{R} = \mathbf{v}_{b-s}\, t$, $\mathbf{R}' = \mathbf{v}_{b-ág}\, t$ e $\mathbf{W} = \mathbf{v}_{ág-s}\, t$.

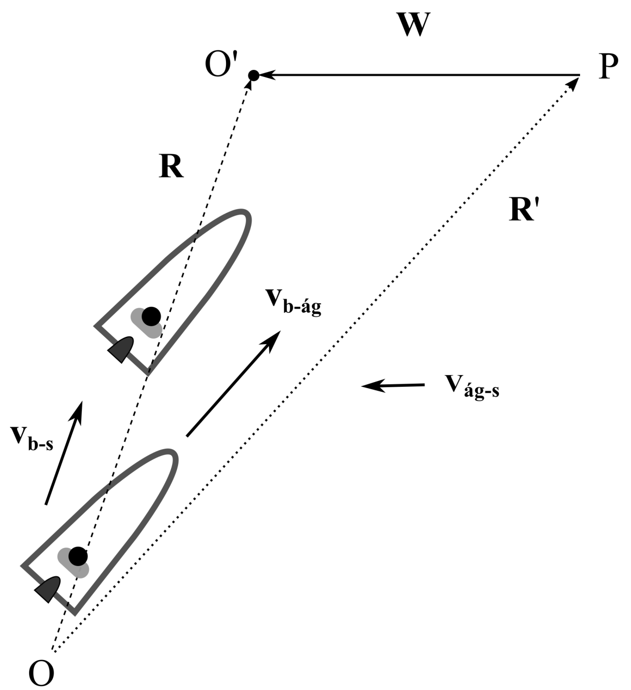


Figura 1.13 – Exemplo de composição de velocidades.

Baricentro e Centro de massa

Seja um conjunto de pontos P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, cujas posições em relação a uma origem O são dadas pelos vetores $\mathbf{r}_i$. Dados n coeficientes c_i, seja G o ponto indicado pelo vetor $\mathbf{G}$ em relação à origem O definido pela expressão

$$\mathbf{G} \equiv \sum c_i \mathbf{r}_i.$$

O vetor assim definido depende *a priori* da origem O. Determinemos sob que condições o ponto dado pelo vetor $\mathbf{G}$ em relação a O não depende da escolha da origem, representando, assim, uma propriedade intrínseca do conjunto dos pontos P_i. Nessas condições, o ponto G é denominado *baricentro* do conjunto de pontos P_i. Consideremos uma segunda origem dada pelo ponto O$'$ e em relação à qual as posições dos pontos P_i são dadas pelos vetores $\mathbf{r}'_i$. Para o mesmo conjunto de coeficientes c_i, seja G$'$ o ponto dado pelo vetor $\mathbf{G}'$ definido em relação a O' pela expressão $\mathbf{G}' \equiv \sum c_i \mathbf{r}'_i$. O problema da determinação do baricentro de um conjunto de pontos P_i pode ser expressado da seguinte maneira: quais devem ser os coeficientes c_i para que os pontos G e G$'$ sejam o mesmo ponto? Se $\mathbf{R}$ é o vetor posição de O em relação a O$'$, é possível estabelecer a seguinte relação vetorial entre os vetores posição dos pontos P_i em relação a O e O$'$:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i.$$

Em termos matemáticos, o problema da determinação do baricentro pode ser formulado, então, como:

$$\mathbf{G}' = \mathbf{R} + \mathbf{G}.$$

Consideremos a expressão para $\mathbf{G}'$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}' &= \sum c_i \mathbf{r}'_i \\
&= \sum c_i \left(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i\right) \\
&= \sum \left(c_i \mathbf{R} + c_i \mathbf{r}_i\right) \\
&= \mathbf{R} \sum c_i + \sum c_i \mathbf{r}_i \\
&= \mathbf{R} \sum c_i + \mathbf{G}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a condição para que o ponto G não dependa da origem é que $\sum c_i = 1$, ou seja, o conjunto dos coeficientes deve satisfazer uma condição de normalização. Se os pontos P_i são ocupados pelas massas pontuais m_i, podemos definir os c_i que satisfaçam a condição de normalização por

$$c_i \equiv \frac{m_i}{\sum m_i}. \tag{1.3}$$

O ponto G assim definido chama-se *centro de massa* do conjunto de massas.

1.7 Produto escalar

Produto escalar: Chama-se produto escalar ou produto interno de dois vetores **A** e **B** (o qual é denotado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$) ao escalar obtido pelo produto dos módulos de **A** e **B** e do cosseno do ângulo θ formado por estes. Ou seja,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{AB} \cos \theta. \tag{1.4}$$

1.7.1 Propriedades do produto escalar

O produto escalar possui as seguintes propriedades:

1. Propriedade distributiva: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,

2. Propriedade comutativa: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$,

3. $(k\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = k\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (k\,\mathbf{B})$.

Da definição de produto escalar, vemos imediatamente que a condição necessária e suficiente para que dois vetores não nulos sejam perpendiculares é que o produto escalar seja nulo, ou seja, se $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Da definição de produto escalar, deduz-se que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathrm{A}^2$. Assim, o módulo de um vetor pode ser escrito como

$$\mathrm{A} = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}. \tag{1.5}$$

Com a notação do produto escalar, o cosseno do ângulo formado por dois vetores não nulos é dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathrm{AB}}. \tag{1.6}$$

1.7.2 Projeção de um vetor

Dado um vetor $\mathbf{A}$ e a reta r, indicada pelo versor û, a projeção de $\mathbf{A}$ sobre r é o segmento orientado $\overline{\mathrm{OA'}}$, cujo módulo é dado por (Figura 1.14)

$$\overline{\mathrm{OA'}} = \mathrm{A}\,\cos\theta = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathrm{u}}. \tag{1.7}$$

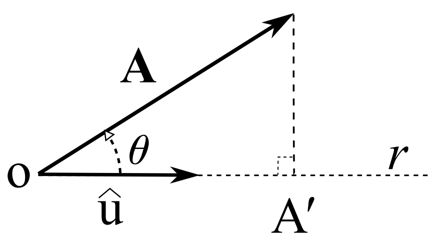


Figura 1.14 – Projeção do vetor $\mathbf{A}$ sobre a reta r definida pelo versor û.

Aplicações na física

i) A aplicação de uma força num objeto muda a condição de movimento deste. O tipo de mudança dependerá da direção e do sentido da força em relação à direção do movimento. Uma força perpendicular à direção da velocidade do objeto (força centrípeta) altera somente a sua direção, mas não o seu módulo.

ii) A agulha de uma bússola tende a se alinhar na direção do campo magnético da Terra sempre da mesma forma, paralela a este. A agulha é feita de um material que possui uma grandeza física vetorial denominada *momento magnético* $\mathbf{M}$, o qual é representado por um vetor. No caso da agulha da bússola, $\mathbf{M}$ está dirigido ao longo desta, e o seu sentido é indicado pelo extremo vermelho.

iii) Um momento magnético $\mathbf{M}$, na presença de um campo magnético $\mathbf{B}$ tende a se orientar ao longo deste. À interação entre ambos podemos atribuir uma energia potencial U, dada por $U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$. Assim, $\mathbf{M}$ paralelo a $\mathbf{B}$ representa uma posição de mínima energia e, portanto, de equilíbrio estável. Se $\mathbf{M}$ é antiparalelo a $\mathbf{B}$, a posição é de máxima energia potencial, sendo, por consequência, uma posição de equilíbrio instável.

1.7.3 Componentes de um vetor em relação a uma direção dada

Dados os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, não paralelos, sempre é possível escrever o vetor $\mathbf{A}$ como soma de dois vetores, sendo um deles paralelo e o outro perpendicular ao vetor $\mathbf{B}$, ou seja, podemos escrever $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{||} + \mathbf{A}_{\perp}$(Figura 1.15). As componentes $\mathbf{A}_{||}$ e $\mathbf{A}_{\perp}$ de um vetor $\mathbf{A}$ em relação a um vetor $\mathbf{B}$ são dadas por:

$$\mathbf{A}_{||} = \left(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathrm{B}}\right) \hat{\mathrm{B}}, \qquad \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{||}. \tag{1.8}$$

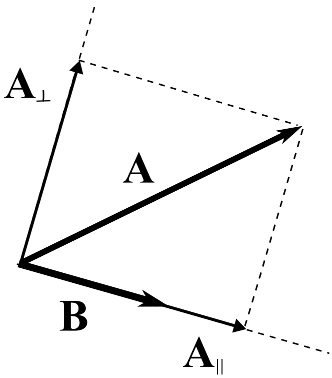


Figura 1.15 – Composição de um vetor **A** como soma de dois outros vetores definidos a partir de um vetor **B**.

Quando aplicamos uma força **F** a um corpo que pode girar livremente em torno de um eixo fixo (z), a efetividade da força em produzir um giro do corpo em torno do eixo dependerá do ponto de aplicação da força, da sua direção e do seu sentido (Figura 1.16). Quando aplicada num determinado ponto, a componente de **F** perpendicular ao eixo será a única componente a exercer um torque em relação ao eixo, sendo, portanto, efetiva na rotação do corpo.

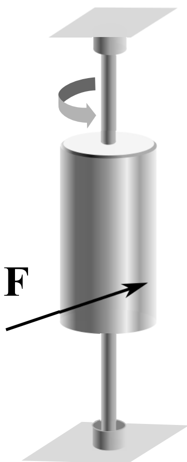


Figura 1.16 – Efeito da aplicação de uma força **F** a um objeto com um eixo de rotação.

1.8 Produto vetorial

Um espaço tridimensional é dito orientado quando nele é definida uma orientação relativa do conjunto dos três eixos cartesianos x, y e z, representado pelo triedro ortogonal formado pelos semieixos positivos. A figura 1.17 mostra os triedros representando as duas orientações possíveis do espaço. Pode-se ver facilmente que não é possível levar um deles, por meio de uma rotação, a coincidir com o outro. Ou seja, ao fazer coincidir as origens de ambos os triedros não será possível levar a coincidir os três eixos correspondentes. No máximo, somente dois eixos serão coincidentes. Dissemos que os triedros das figuras 1.17-a e b têm orientações diferentes. Um triedro como o 1.17-a é dito *positivo* ou *direito*: se colocamos um parafuso normal ao plano x-y e o fazemos girar no sentido de x para y, o parafuso avança no sentido positivo do eixo z. Caso contrário, o triedro é dito *negativo* ou *inverso* (Figura 1.17-b). Existem outros critérios para definir o sentido positivo de um triedro: se posicionarmos os dedos indicador, médio e polegar formando um triedro, tomados nessa ordem e associando-os respectivamente aos eixos x, y e z, eles determinam um triedro direto. Um outro critério para determinar se um triedro é direto é o seguinte: um observador parado sobre o plano x-y com a cabeça no sentido positivo do eixo z atribuiria ao giro do eixo x para o y um sentido anti-horário.

Num espaço orientado, é possível definir um tipo particular de operação entre vetores, o denominado *produto vetorial*.

Seja um espaço orientado, ou seja, um espaço no qual foi definido um triedro fundamental formado pelos eixos coordenados x, y, e z. Nesse espaço, podemos dar a seguinte definição de produto vetorial:

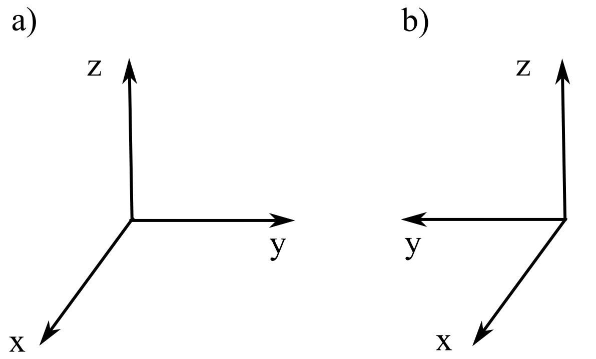


Figura 1.17 – Triedros representando as duas possíveis orientações do espaço: a) triedro positivo; b) triedro negativo. Cada triedro é a imagem especular do outro.

Produto vetorial: O produto vetorial de dois vetores **A** e **B** não paralelos, dados nessa ordem, é o vetor **C**, representado pela expressão $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, que tem as seguintes características:
i) O módulo de **C** é igual ao produto dos módulos dos vetores **A** e **B** pelo seno do ângulo θ que eles formam, ou seja,

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{1.9}$$

ii) A direção do vetor **C** é perpendicular ao plano determinado pelos vetores **A** e **B**.
iii) O sentido é tal que o triedro formado pelos vetores **A** e **B** e **C**, nessa ordem, têm a mesma orientação do espaço (Figura 1.18).

A partir da definição de produto vetorial, é evidente que a condição necessária e suficiente para que dois vetores não nulos sejam paralelos é que seu produto vetorial seja nulo.

1.8.1 Propriedades do produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores possui as seguintes propriedades:

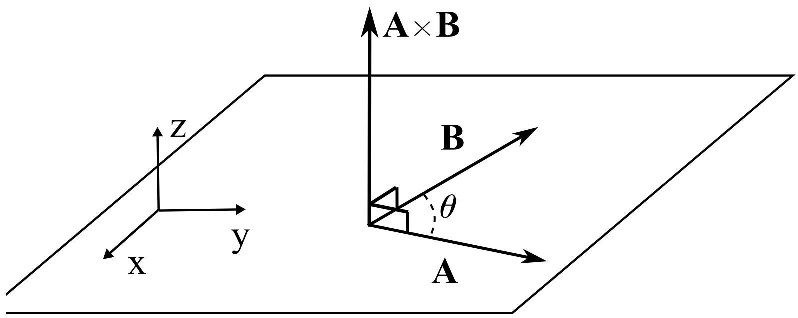


Figura 1.18 – Produto vetorial dos vetores **A** e **B**.

i. Propriedade anticomutativa:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

ii. Propriedade distributiva:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}.$$

iii. Sendo k um escalar, verifica-se que

$$k\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = k\,\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times k\,\vec{B}.$$

Sejam os vetores **A** e **B**, os quais formam um ângulo θ. O módulo do produto vetorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathrm{AB}\,\mathrm{sen}\,\theta$, representa a área do paralelogramo determinado pelos vetores **A** e **B** (Figura 1.19).

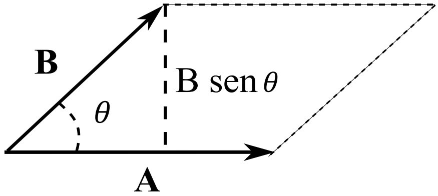


Figura 1.19 – Significado geométrico do módulo do produto vetorial.

Exemplos

1. Um exemplo de grandeza física obtida pelo produto vetorial de outras duas é o torque de uma força definida por $\Gamma \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor do ponto de aplicação da força em relação a um determinado ponto. Assim, o torque de uma força depende da escolha do ponto de referência. O torque está para as rotações assim como a força está para as translações. O trabalho mecânico realizado pelo torque durante a rotação de um corpo é responsável pela mudança da energia cinética rotacional E_c.

$$\Gamma d\theta = dE_c.$$

2. Uma partícula de carga q se movimentando numa região onde existe um campo magnético $\mathbf{B}$ experimentará uma força $\mathbf{F}$ dependente da sua velocidade $\mathbf{v}$, dada por:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

   Como a taxa com que uma força realiza trabalho é $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, a força sobre uma partícula carregada devido à interação com um campo magnético não tem a capacidade de mudar a energia cinética da partícula, mas a sua direção.

1.9 Produto misto

Produto misto: o produto misto dos vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ é o escalar obtido pelo produto escalar de $\mathbf{C}$ com o produto vetorial de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}. \tag{1.10}$$

De um ponto de vista geométrico, o produto misto de três vetores não coplanares **A**, **B** e **C** representa o volume do paralelepípedo determinado pelos três vetores (Figura 1.20). Com efeito, o módulo do $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ representa a área do paralelogramo determinado por **A** e **B**, e $C \cos\alpha$, onde α é o ângulo formado pelo vetor **C** com a direção de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, representa a altura do paralelepípedo. Do anterior se depreende que o produto misto de três vetores no qual dois deles são paralelos é nulo e que a condição necessária e suficiente para que três vetores se encontrem no mesmo plano (vetores coplanares) é que o seu produto misto seja nulo.

O produto misto dos versores fundamentais é igual a 1 para um triedro positivo e é igual a (-1) para um triedro negativo.

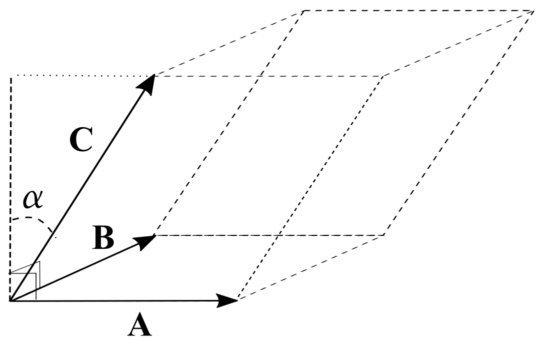


Figura 1.20 – Significado geométrico do produto misto dos vetores não coplanares **A**, **B** e **C**.

1.10 Pseudovetores e pseudoescalares

Como visto na definição do produto vetorial, a direção e o sentido do produto vetorial de dois vetores **A** e **B**, dados nessa ordem, são determinados de forma que o triedro formado pelos vetores **A**, **B** e $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tenham a mesma orientação que o triedro que define a orientação do espaço. Por esse motivo, a mudança da orientação do espaço de positivo para negativo, por exemplo, terá como consequência a mudança no sentido do vetor produto vetorial, ou seja, a definição de um vetor como sendo o produto vetorial de outros dois vetores não é independente da escolha da orientação do espaço. Um vetor cuja definição está vinculada à orientação do espaço é denominado *vetor axial* ou *pseudovetor*. Uma vez determinada a orientação do espaço, os pseudovetores são completamente determinados e podem ser aplicadas a eles as regras da álgebra vetorial e do cálculo vetorial. O produto escalar de dois vetores é um número que não depende da escolha do sistema de coordenadas, ou seja, é um invariante ante rotações ou translações do sistema de coordenadas. Porém, o produto escalar de um vetor por um pseudovetor não tem essa propriedade: por uma mudança da orientação do espaço, o pseudovetor efetuará uma rotação de 180° e o produto escalar terá o valor oposto. Por tal motivo, o produto escalar de um vetor por um pseudovetor é um exemplo de um *pseudoescalar*. É fácil comprovar as seguintes regras:

1. vetor $\cdot$ vetor $\Rightarrow$ escalar;
2. vetor $\cdot$ pseudovetor $\Rightarrow$ pseudoescalar;
3. pseudovetor $\cdot$ pseudovetor $\Rightarrow$ escalar;
4. vetor $\times$ vetor $\Rightarrow$ pseudovetor;
5. vetor $\times$ pseudovetor $\Rightarrow$ vetor;
6. pseudovetor $\times$ pseudovetor $\Rightarrow$ pseudovetor.

Como exemplo, demonstremos o caso 2: a mudança da orientação do espaço leva a uma inversão na orientação do pseudovetor. Portanto, o ângulo entre o vetor e o pseudovetor muda de α para $180° - \alpha$, o qual, por sua vez, muda o sinal do produto escalar. ⧫

1.11 Problemas

1. Prove que o ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

2. Dados os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, escreva $\mathbf{B}$ como soma de um vetor paralelo e um vetor perpendicular ao vetor $\mathbf{A}$.

3. Se $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$, prove que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} = 3\,\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

4. Prove que a condição necessária e suficiente para que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ sejam perpendiculares entre si é que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

5. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ três vetores não paralelos a um mesmo plano. Prove que um vetor $\mathbf{D}$ qualquer pode ser escrito na forma $\mathbf{D} = l\,\mathbf{A} + m\,\mathbf{B} + n\,\mathbf{C}$ onde l, m e n são escalares dados respectivamente por:

$$l = \frac{(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}}\,, \qquad m = \frac{(\mathbf{D} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}}\,, \qquad n = \frac{(\mathbf{D} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}}{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}}\,.$$

6. Considere o triângulo formado pelos vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ da figura 1.21.

   i. Demonstre o *teorema do cosseno*:

$$\mathrm{C}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{A}\,\mathrm{B}\cos\gamma. \tag{1.11}$$

   ii. Demonstre o *teorema do seno*:

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{sen}\,\gamma} \tag{1.12}$$

   (Dica: observe, por exemplo, que $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e considere o módulo das expressões nos extremos das igualdades).

7. A equação vetorial da reta que passa pelo ponto $\mathbf{r}_{\mathrm{o}}$ e tem a direção do vetor $\mathbf{A}$ é dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{o}} + k\,\mathbf{A}, \tag{1.13}$$

   onde k é um número real que toma valores no intervalo $(-\infty, \infty)$ quando o ponto $\mathbf{r}$ se desloca ao longo da reta.

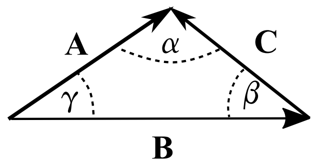


Figura 1.21 – Construção geométrica para demonstração dos teoremas do cosseno e do seno.

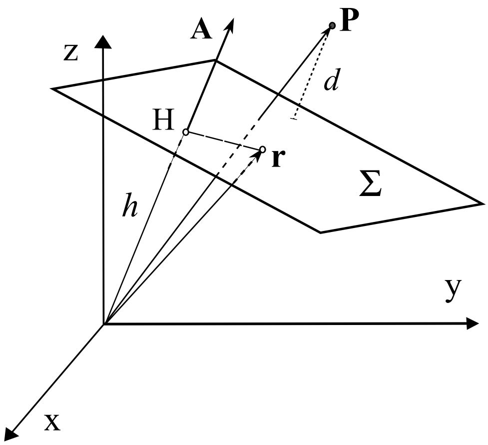


Figura 1.22 – Gráfico do plano Σ determinado pelo vetor **a** e a distância h à origem.

i. Mostre que a distância d de um ponto $\mathbf{p}$ à reta é dada por:

$$d = \frac{|(\mathbf{p} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{A}|}{\mathrm{A}}. \tag{1.14}$$

ii. Dadas as retas $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + k_1\,\mathbf{A}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + k_1\,\mathbf{B}$, mostre que a menor distância entre elas, d, é dada por:

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})|}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}. \tag{1.15}$$

8. O conjunto de pontos $\mathbf{r}$ que pertencem a um plano Σ satisfazem a seguinte equação vetorial:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathrm{A}h, \tag{1.16}$$

onde **A** é um vetor perpendicular ao plano e h é a distância do plano à origem do sistema de coordenadas (Figura 1.22).

i. Mostre que a distância d de um ponto **P** ao plano é dado por

$$d = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} - c}{\mathrm{A}}. \tag{1.17}$$

ii. Mostre que a equação do plano normal ao vetor **A** que passa pelo ponto $\mathbf{r}_\mathrm{o}$ é dada por

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mathrm{o}) = 0. \tag{1.18}$$

9. Mostre que dados os pontos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$, a equação do plano que contém os três pontos é

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0. \tag{1.19}$$

Este livro faz uma abordagem integradora do tema de vetores, dando subsídios para uma compreensão geral do tema e permitindo que alunos de cursos de exatas entendam seus aspectos abstratos, especialmente relacionados ao estudo de sistemas mecânicos, como os osciladores acoplados, ou nos estudos de difusão de calor, como na descrição dos estados dos sistemas na mecânica quântica.

Na primeira parte da obra, é realizada uma abordagem geométrica dos vetores e da álgebra vetorial considerando a noção de vetores em $\mathbb{R}^3$. Também são apresentadas a representação dos vetores em sistemas de coordenadas e a relação entre as diversas representações. Na segunda parte, são abordados temas usualmente presentes em cursos de cálculo avançado. São trabalhados o conceito de vetor como objeto matemático de um espaço de dimensão n e, e especial, as noções de campos escalares e vetoriais e os campos associados como os campos gradiente, divergente e rotacional. Na última parte, são apresentadas as noções de vetor dentro do formalismo da álgebra linear.

Concomitantemente aos temas abordados, são fornecidos exemplos de aplicação dos conceitos matemáticos em diversas áreas da física, os quais não buscam exaurir as possibilidades, mas apresentar a aplicabilidade de conceitos que possam parecer demasiado abstratos.

www.blucher.com.br
ISBN 978-65-5506-002-7
9 786555 060027

Blucher

Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Vetores com Aplicações em Física

Sergio Leonardo Gómez

ISBN: 9786555060027

Páginas: 304

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2020

Peso: 0.501 kg
