Capítulo 1

Resolução dos exercícios propostos

P 1.3

a) $f(5,-3) = \sqrt{(-3)^2 - 5} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

b) $f(-\operatorname{sen}^2 t, \cos t) = \sqrt{\cos^2 t - (-\operatorname{sen}^2 t)} = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1} = 1$

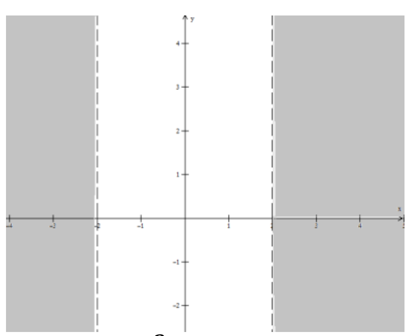
P 1.4

a) $f(1,0,-1) = \frac{4}{9-1^2-0^2-2(-1)^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $f(t,0,2t) = \frac{4}{9-t^2-0^2-2(2t)^2} = \frac{4}{9-9t^2}$

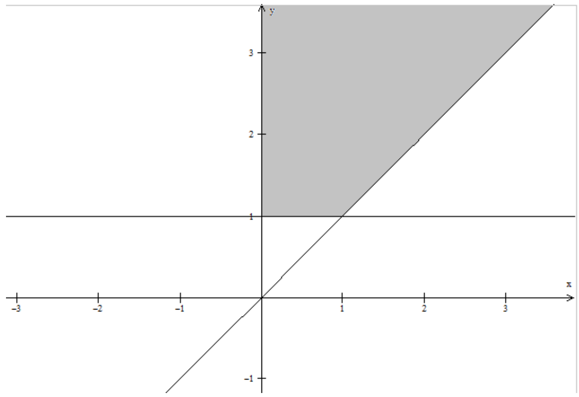
P 1.6

a) $f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{x^2-4}}$ Pela condição de existência da função, devemos ter $x^2 - 4 > 0 \;\; \rightarrow$ $x < -2$ ou $x > 2$. Então:



Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < -2 \; \cup x > 2\}$.

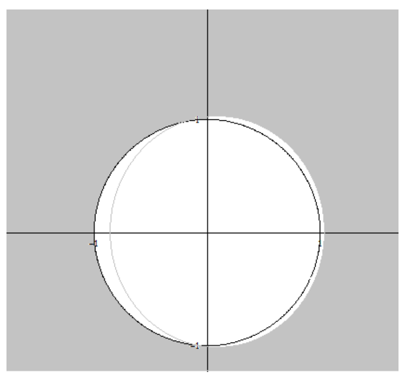
b) $f(x,y) = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-x}$. Pela condição de existência da função, devemos ter $y - 1 \geq 0$ e $y - x \geq 0 \rightarrow\ \ y \geq 1$ e $y \geq x$. Vamos fazer a interseção entre as regiões:



Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 1\ \cap\ y \geq x\}$.

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Pela condição de existência da função, devemos ter:

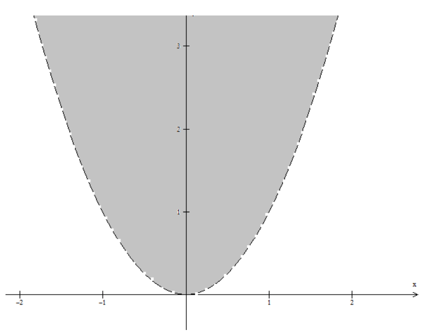
$x^2 + y^2 - 1 \geq 0\ \ \rightarrow\ \ x^2 + y^2 \geq 1$. Desenhando a região:



Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$.

d) $f(x,y) = \ln(y - x^2)$. Pela condição de existência da função, devemos ter:

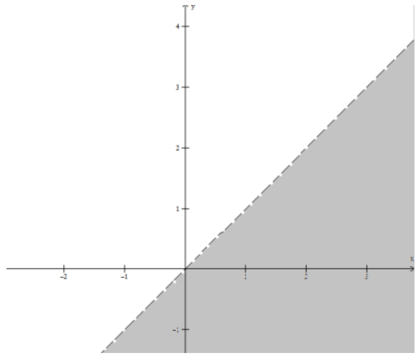
$y - x^2 > 0\ \ \rightarrow\ \ y > x^2$. Desenhando a região:



R: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > x^2\}$.

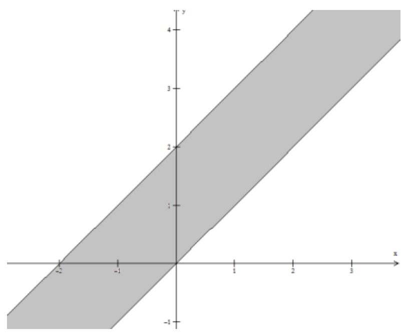
e) $f(x,y) = \frac{xy-2}{5\sqrt{x-y}}$. Pela condição de existência da função, devemos ter:

$x - y > 0 \quad \rightarrow \quad x > y$. Desenhando a região:



Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$.

f) $f(x,y) = \text{arc}\cos(x - y + 1)$. Pela condição de existência da função, devemos ter $-1 \leq x - y + 1 \leq 1 \rightarrow \; y \leq x + 2$ e $y \geq x$. Fazendo a interseção entre as regiões:



Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y \leq x + 2\}$.

g) $f(x,y) = \sqrt{2 - |x| - |y|}$. Pela condição de existência da função, devemos ter:

$2 - |x| - |y| \geq 0$. Neste caso, vamos ter que analisar cada quadrante:

1º quadrante ($x > 0$ e $y > 0$):

$$2 - x - y \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \leq 2 - x$$

2º quadrante ($x < 0$ e $y > 0$):

$$2 + x - y \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \leq 2 + x$$

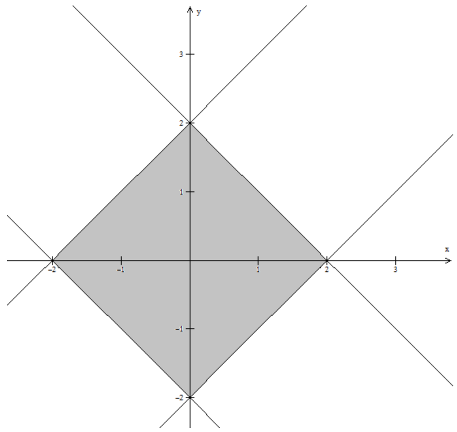
3º quadrante ($x < 0$ e $y < 0$):

$$2 + x + y \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \geq -2 - x$$

4º quadrante ($x > 0$ e $y < 0$):

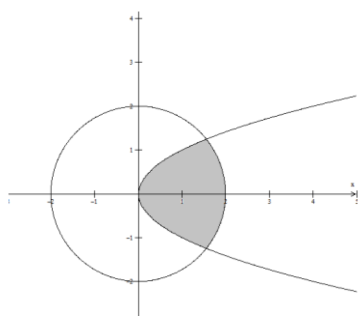
$$2 - x + y \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \geq -2 + x$$

Fazendo a interseção entre as retas em seus respectivos quadrantes,



Resposta: $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2 \geq |x| + |y|\ \}$.

h) $f(x, y) = \sqrt{x - y^2} + \ln(4 - x^2 - y^2)$. Pelas condições de existência da função, devemos ter: $x - y^2 \geq 0$ e $4 - x^2 - y^2 > 0 \ \rightarrow\ x \geq y^2$ e $4 > x^2 + y^2$. Fazendo a interseção entre as regiões,



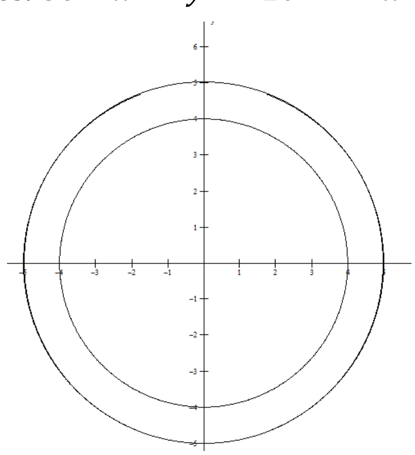
Resposta: $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y^2$ e $4 > x^2 + y^2\ \}$.

P 1.8

Fazendo $z = 11$, temos: $36 - x^2 - y^2 = 11 \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 25$

Fazendo $z = 20$, temos: $36 - x^2 - y^2 = 20 \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 16$

Daí,

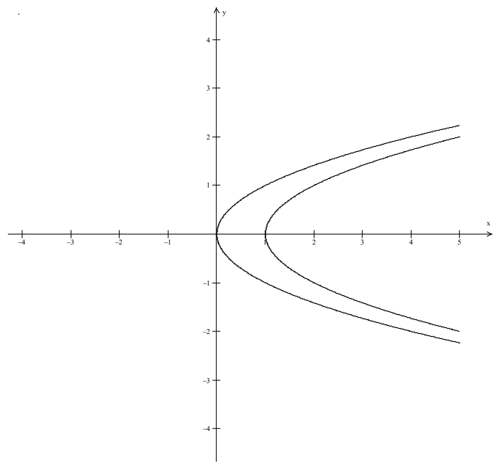


P 1.9

Fazendo $z = 0$, temos: $\sqrt{y^2 - x + 1} = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 + 1 = x$

Fazendo $z = 1$, temos: $\sqrt{y^2 - x + 1} = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = x$

Daí,



P 1.11

a) Esboçar as curvas isóbaras sobre as quais $P = 10$ e $P = 25$;
b) Se um ponto P está na posição $P(1,5)$, determinar a trajetória percorrida por esse ponto e qual a sua pressão ao longo da trajetória.

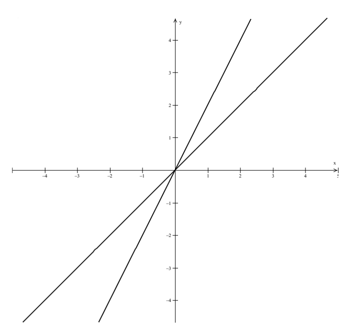
Resolução:

Como $P(x,y) = \frac{5y}{x}$, para:

- $P = 10 \;\rightarrow\; \frac{5y}{x} = 10 \quad \rightarrow \quad 5y = 10x \;\rightarrow\; y = 2x$
- $P = 25 \;\rightarrow\; \frac{5y}{x} = 25 \quad \rightarrow \quad 5y = 25x \;\rightarrow\; y = 5x$

Para o ponto $P(1,5)$ é a pressão $P = \frac{5.5}{1} = 25$ constante ao longo da trajetória.

Graficamente,



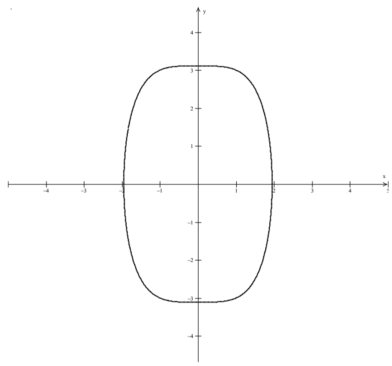
P 1.12.

Como $T(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + 15$, para (1,3):

$$T(1{,}3) = 2.1^4 + 3.3^2 + 15 = 2 + 27 + 15 = 44$$

$$2x^4 + 3y^2 + 15 = 44 \quad \rightarrow \quad 2x^4 + 3y^2 = 29$$

Graficamente,

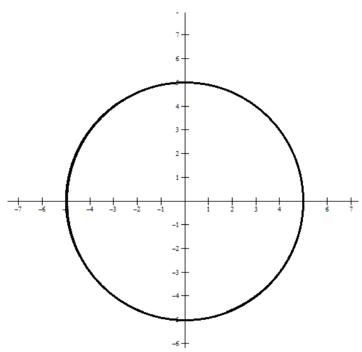


P 1.13

a) A restrição é: $50 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; x^2 + y^2 \leq 50$, ou seja,
$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 50\}$

b) $T(3{,}4) = 15 + \sqrt{50 - 3^2 - 4^2} = 15 + \sqrt{50 - 9 - 16} = 15 + 5 = 20$

c) $15 + \sqrt{50 - x^2 - y^2} = 20 \;\; \rightarrow \;\; \sqrt{50 - x^2 - y^2} = 5 \;\; \rightarrow \;\; 50 - x^2 - y^2 = 25 \;\; \rightarrow$
$x^2 + y^2 = 25$



P 1.14

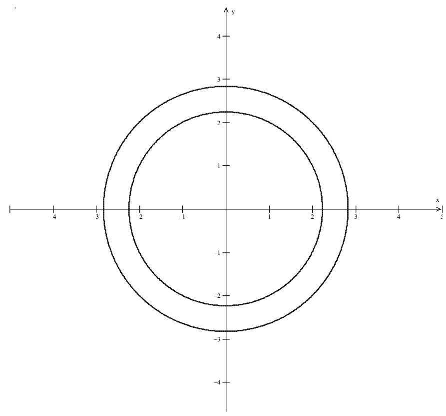
a) $\frac{120}{x^2+y^2} = 30 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$

b) $V(1{,}1) = \frac{120}{1^2+1^2} = 60 \quad \rightarrow \quad \frac{120}{x^2+y^2} = 60 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2$

P 1.15

$$\frac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}}=4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9-x^2-y^2}=1 \quad \rightarrow \quad 9-x^2-y^2=1 \quad \rightarrow x^2+y^2=8$$

$$\frac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}}=2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9-x^2-y^2}=2 \quad \rightarrow \quad 9-x^2-y^2=4 \quad \rightarrow x^2+y^2=5$$



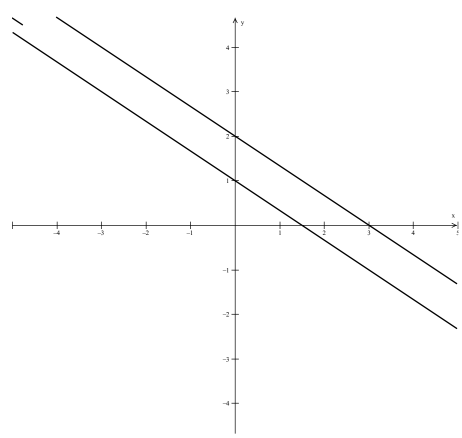
P 1.17

a) Não temos restrição no domínio da função portanto, o domínio da função é todo o plano: $D(f)=\mathbb{R}^2$.

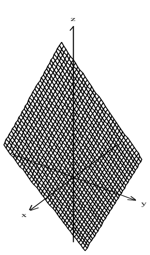
b) Vamos escolher $z=0 \ \rightarrow 2x+3y=6$

$z=3 \ \rightarrow 2x+3y=3$

$z=6 \ \rightarrow 2x+3y=0$



c)



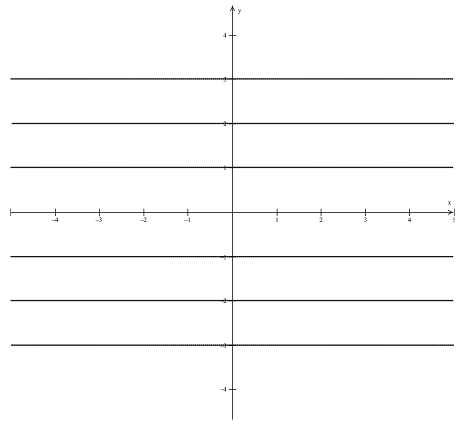
P 1.18

a) Não temos restrição no domínio da função portanto, o domínio da função é todo o plano: $D(f) = \mathbb{R}^2$.

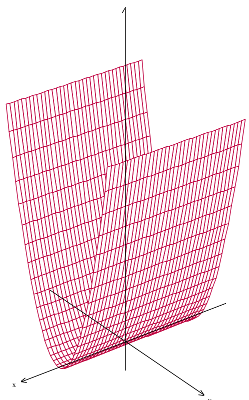
b) $z = 1 \rightarrow y^2 = 1$

$z = 4 \rightarrow y^2 = 4$

$z = 9 \rightarrow y^2 = 9$



c)



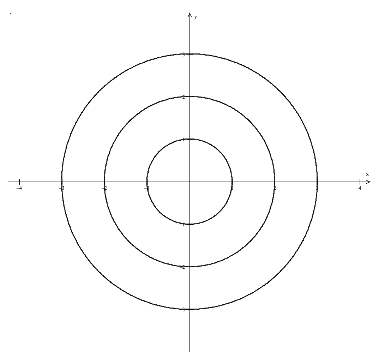
P 1.19

a) Não temos restrição no domínio da função portanto, o domínio da função é todo o plano: $D(f) = \mathbb{R}^2$.

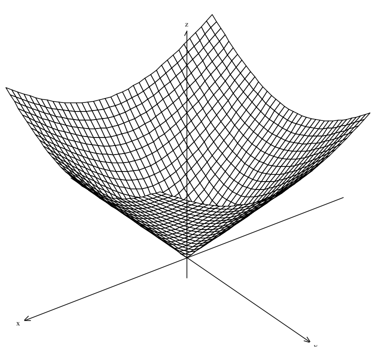
b) $z = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$z = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$z = 3 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$



c)



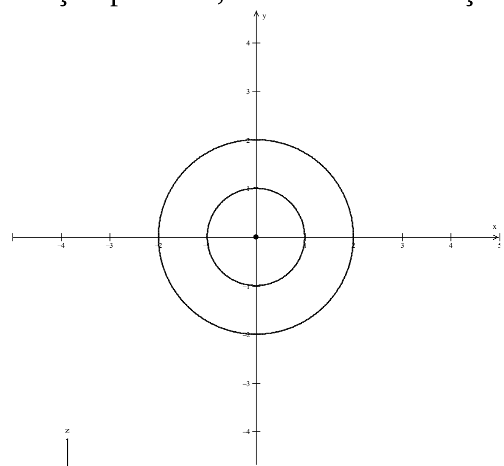
P 1.20 Dada a função *f*: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$:

a) Não temos restrição no domínio da função portanto, o domínio da função é todo o plano: $D(f) = \mathbb{R}^2$.

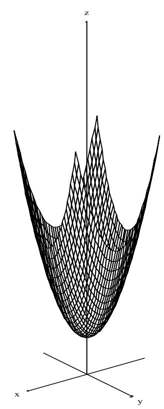
b) $z = 4 \ \rightarrow x^2 + y^2 = 0$

$z = 5 \ \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$z = 8 \ \rightarrow x^2 + y^2 = 4$



c) Esboçar o gráfico da função.



P 1.23

a) Substituindo os respectivos valores,

$$\lim_{(x,y)\to(0,9)} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) = \frac{0}{\sqrt{9}} = 0$$

b) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,)\to(2,-3)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-3}\right)^2 = \left(\frac{3-2}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

c) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,)\to(1,0)} \frac{x.\operatorname{sen} y}{x^2 + 1} = \frac{1.\operatorname{sen} 0}{1^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

d) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{(-1).2}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{-1}{5}$$

e) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,)\to(2,1)}[\ln(xy-1)] = [\ln(2.1-1)] = \ln 1 = 0$$

P 1.25

a) Observe que é um limite indeterminado, isto é, seu resultado dá $\frac{0}{0}$. Então, vamos fatorar o denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x} = \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2(y+4) - x(y+4)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{(x^2-x)(y+4)} = \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{1}{(x^2-x)} = \frac{1}{2^2-2} = \frac{1}{2}$$

b) Observe que é um limite indeterminado, isto é, seu resultado dá $\frac{0}{0}$. Então, vamos fatorar o numerador e o denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)}{(x+y)} = \frac{1-1}{1+1}$$
$$= \frac{0}{2} = 0$$

c) Observe que é um limite indeterminado, isto é, seu resultado dá $\frac{0}{0}$. Então, vamos fatorar o numerador e o denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - xy} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^3}{x(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x} = \frac{0^2}{1}$$
$$= 0$$

P 1.27

a) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,z)\to(3,3,0)}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z) = (\operatorname{sen}^2 3 + \cos^2 3) + \sec^2 0 = 1 + 1 = 2$$

b) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \ln\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 0^2} = \ln 4$$

c) Substituindo os valores respectivos,

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)}(7ze^{-2y}\cos(2x)) = \left(7.3e^{-2(0)}\cos(2\pi)\right) = 7.3.1 = 21$$

P 1.29

Devemos calcular os limites por caminhos diferentes que passam pelo ponto de acumulação e verificar que algum deles é diferente.

a) Por um caminho no eixo dos *x*:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0^2} = 1$$

b) Po rum caminho no eixo dos y:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = 0$$

Como os limites são diferentes, não existe limite.

P 1.30 Verificar que não existe o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$$

Devemos calcular os limites por caminhos diferentes que passam pelo ponto de acumulação e verificar que algum deles é diferente.

a) Por um caminho no eixo dos *x*:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2.0}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

b) Por meio da parábola $y = x^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2.x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{2x^4} = \frac{3}{2}$$

Como os limites são diferentes, não existe limite.