Capítulo 7

TABELA DE DERIVADAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E SUAS INVERSAS	
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
$\operatorname{senh} u$	$\cosh u \,.\, u'$
$\cosh u$	$\operatorname{senh} u \,.\, u'$
$\operatorname{tgh} u$	$\sec^2\mathrm{h}\, u \,.\, u'$
$\operatorname{cotgh} u$	$-\operatorname{cossec}^2\mathrm{h}\, u \,.\, u'$
$\operatorname{sech} u$	$-\operatorname{sech} u \,.\, \operatorname{tgh} u \,.\, u$
$\operatorname{cossech} u$	$-\operatorname{cossech} u \,.\, \operatorname{cotgh} u \,.\, u'$
$\arg \operatorname{senh} u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}, \quad u = u(x)$
$\arg \cosh u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}, \quad u > 1$
$\arg \operatorname{tgh} u$	$\dfrac{u'}{1-u^2}, -1 < u < 1$
$\arg \operatorname{cotgh} u$	$\dfrac{u'}{1-u^2}, \quad u < -1 \vee u > 1$
$\arg \operatorname{sech} u$	$-\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}, 0 < u < 1$
$\arg \operatorname{cossech} u$	$-\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}, u \neq 0$

P 7.2

a)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da secante hiperbólica,

$$y' = -\operatorname{sech} u \,.\, \operatorname{tgh} u \,.\, u'$$

$$y' = -\operatorname{sech}(3x^2+1)\,.\,\operatorname{tgh}(3x^2+1)\,.\,(6x)$$

Resposta: $f'(x) = -6x.\operatorname{sech}(3x^2+1)\,.\,\operatorname{tgh}(3x^2+1)$.

b)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da tangente hiperbólica e do produto de duas funções,

$$(uv)' = u'v + uv' \ \text{ e } \ (\operatorname{tgh} u)' = \sec^2\text{h}\, u \,.\, u'$$

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}}\ \operatorname{tgh}(\sqrt{2x}) + \sqrt{2x}.\sec^2\text{h}(\sqrt{2x})\,.\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2x}\right) + \sec^2\text{h}(\sqrt{2x})\right) = \frac{\sqrt{2x}}{2x}\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2x}\right) + \sec^2\text{h}(\sqrt{2x})$$

Resposta: $f'(x) = \frac{\sqrt{2x}}{2x}\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2x}\right) + \sec^2\text{h}(\sqrt{2x})$.

c)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada do cosseno hiperbólico e do produto de duas funções,

$$(uv)' = u'v + uv' \ \text{ e } \ (\cosh u)' = \operatorname{senh} u \,.\, u'$$

$$y' = 3x^2\cosh(5x+1) + x^3.\operatorname{senh}(5x+1)\,.\,5$$

Resposta: $f'(x) = 3x^2\cosh(5x+1) + 5x^3.\operatorname{senh}(5x+1)$.

d)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da cossecante hiperbólica e da função potência,

$$(u^m)' = mu^{m-1}.u' \ \text{ e } \ (\operatorname{cossech} u)' = -\operatorname{cossech} u \,.\, \operatorname{cotgh} u \,.\, u'$$

$$y' = 2\operatorname{cossec}^1\text{h}(6x)\,.\,[-\operatorname{cossech}(6x)\operatorname{cotgh}(6x)].\,6$$

Resposta: $f'(x) = -12\operatorname{cossec}^2\text{h}(6x)\operatorname{cotgh}(6x)$.

e)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da tangente hiperbólica e da função logarítmica,

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad \text{e} \quad (\operatorname{tgh} u)' = \sec^2\mathrm{h}\, u\,.\,u'$$

$$y' = \frac{\sec^2\mathrm{h}(2x)}{\operatorname{tgh}(2x)}.(2) = 2\frac{1}{\cos^2\mathrm{h}(2x)}.\frac{\cosh(2x)}{\operatorname{senh}(2x)} = 2\frac{1}{\cosh(2x)\ \operatorname{senh}(2x)}$$

$$= 2\frac{1}{\frac{1}{2}\operatorname{senh}(4x)} = 4\ \operatorname{cossech}(4x)$$

Resposta: $f'(x) = 4\ \operatorname{cossech}(4x)$.

f)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada do cosseno hiperbólico,

$$y' = \operatorname{senh} u\,.\,u'$$

$$y' = \operatorname{senh}(2x^3+5)\,.\,(6x^2)$$

Resposta: $f'(x) = 6x^2\operatorname{senh}(2x^3+5)$.

P 7.4

a)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da inversa do cosseno hiperbólico,

$$y = \operatorname{argcosh} u \quad \to \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$y' = \frac{(\operatorname{cossec} x)'}{\sqrt{(\operatorname{cossec} x)^2-1}} = \frac{-\operatorname{cossech} x\,.\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 x}}$$

Resposta: $y' = -\frac{\operatorname{cossec}\ x.\operatorname{cotg}\ x}{|\operatorname{cotg}\ x|}$.

b)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da inversa da cotangente hiperbólica,

$$y = \operatorname{argcotgh} u \quad \to \quad y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y' = \frac{(3x+1)'}{1-(3x+1)^2} = \frac{3}{1-(9x^2+6x+1)} = \frac{3}{-9x^2-6x} = \frac{-1}{3x^2+2x}$$

Resposta: $y' = -\frac{1}{x(3x+2)}$.

c)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da inversa do seno hiperbólico,

$$y = \operatorname{argsenh} u \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$y' = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\sqrt{(\operatorname{tg} x)^2+1}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|$$

Resposta: $y' = |\sec x|$.

d)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da inversa do cosseno hiperbólico e do produto,

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{e} \quad (\arg\cosh u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$y' = (x^2)'.\arg\cosh(x^2) + x^2(\arg\cosh(x^2))'$$

$$= 2x.\arg\cosh(x^2) + x^2\frac{(x^2)'}{\sqrt{(x^2)^2-1}}$$

$$= 2x.\arg\cosh(x^2) + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$$

Resposta: $y' = 2x.\left(\arg\cosh x^2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}\right)$.

e)

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da inversa da secante hiperbólica e do produto,

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{e} \quad (\arg\operatorname{sech} u)' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$$

$$y' = (3x+1)' \arg\operatorname{sech}(2x^3) + (3x+1)(\arg\operatorname{sech}(2x^3))'$$
$$= 3\arg\operatorname{sech}(2x^3) + (3x+1)\left(-\frac{(2x^3)'}{(2x^3)\sqrt{1-(2x^3)^2}}\right)$$
$$= 3\arg\operatorname{sech}(2x^3) - (3x+1)\left(\frac{6x^2}{(2x^3)\sqrt{1-4x^6}}\right)$$
$$= 3\left(\arg\operatorname{sech}(2x^3) - \frac{(3x+1)}{x\sqrt{1-4x^6}}\right)$$

Resposta: $y' = 3\left(\arg\operatorname{sech}(2x^3) - \frac{(3x+1)}{x\sqrt{1-4x^6}}\right)$.

P 7.6 Calcular:

a)

Resolução: Fatorando $\operatorname{sech}^4 x$ temos:

$$I = \int \operatorname{sech}^2 x \,.\, \operatorname{sech}^2 x\, dx$$

Como,

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$$
$$I = \int (1 - \operatorname{tgh}^2 x) \operatorname{sech}^2 x\, dx$$

Fazendo a substituição de variável

$$u = \operatorname{tgh} x \quad \rightarrow \quad du = \sec^2\mathrm{h}\, x\, dx$$
$$I = \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tgh} x - \frac{\operatorname{tgh}^3 x}{3} + C$$

Resposta: $I = \operatorname{tgh} x - \frac{\operatorname{tgh}^3 x}{3} + C$

b)

Resolução: Fazendo substituição de variável,

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2xdx \quad \rightarrow \quad xdx = \frac{du}{2}$$

então,

$$I = \int x.\operatorname{senh} x^2\, dx = \int \operatorname{senh} u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh} u\, du = \frac{1}{2}\cosh u + C$$
$$= \frac{1}{2}\cosh x^2 + C$$

Resposta: $I = \frac{1}{2}\cosh x^2 + C$

c)

Resolução: Fazendo substituição de variável,

$$u = x^3 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2 dx \quad \rightarrow \quad x^2 dx = \frac{du}{3}$$

então,

$$I = \int x^2 \cosh(x^3)\, dx = \int \cosh u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{senh} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{senh} x^3 + C$$

Resposta: $I = \frac{1}{3}\operatorname{senh} x^3 + C$

d)

Resolução: Lembrando que,

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh} x \cosh x$$

então,

$$I = \int \operatorname{senh} x.\cosh x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(2x)\, dx$$

Fazendo substituição de variável,

$$u = 2x \quad \rightarrow \quad du = 2dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

então,

$$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh} u \frac{du}{2} = \frac{1}{4}\cosh u + C = \frac{1}{4}\cosh(2x) + C$$

Resposta: $I = \frac{1}{4}\cosh(2x) + C$

e) $I = \int \operatorname{sech}^2 x \operatorname{tgh} x\, dx$

Resolução: Fazendo a substituição de variável

$$u = \operatorname{tgh} x \quad \rightarrow \quad du = \sec^2 \mathrm{h}\, x\, dx$$

$$I = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{2} + C$$

Como

$$1 - \operatorname{sech}^2 x = \operatorname{tgh}^2 x$$

$$I = \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{2} + C = \frac{1 - \operatorname{sech}^2 x}{2} + C = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sech}^2 x}{2} + C = -\frac{\operatorname{sech}^2 x}{2} + C$$

Já que *C* é uma constante qualquer.

Resposta: $I = -\frac{\operatorname{sech}^2 x}{2} + C$