

E 3.16 Calcular $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$, onde E está limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Resolução:

Pelos dados da região, temos que

$$1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 4 \rightarrow 1 - r^2 \leq z \leq 4$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Então a integral tripla é dada por:

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\int_{1-r^2}^4 r dz \right] r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[z \Big|_{1-r^2}^4 \right] r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - (1 - r^2)) r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^4 + 3r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} + r^3 \right] \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} + 1 \right) d\theta = \frac{6}{5} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{12\pi}{5} \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{12\pi}{5}$