

11 Escoamento Compressível

A maioria dos cursos introdutórios à mecânica dos fluidos são baseados nas análises dos escoamentos incompressíveis. Nos primeiros capítulos deste livro nós estávamos mais interessados na análise do comportamento dos escoamentos incompressíveis e apenas em poucas circunstâncias nós abordamos os efeitos da compressibilidade do fluido sobre o comportamento do escoamento. O modelo de fluido incompressível é conveniente porque simplifica muito a análise dos escoamentos. Lembre que nós utilizamos este modelo na derivação da equação de Bernoulli (veja o Cap. 5) e os vários exemplos apresentados neste livro mostram que o modelo de escoamento incompressível é útil na análise de muitos escoamentos.

Entretanto, qualquer estudo de mecânica dos fluidos que não inclua a análise do escoamentos incompressíveis é incompleto porque a compressibilidade dos fluidos é muito importante na análise de muitos problemas da engenharia. Por exemplo, a medição da velocidade em escoamentos rápidos requer uma análise que leve em consideração a compressibilidade do fluido. O escoamento de gases nos componentes de uma turbina a gás normalmente é compressível e muitos aviões voam rápido o suficiente para que o escoamento em torno dele seja compressível.

A variação da massa específica nos escoamentos compressíveis requer uma atenção especial em relação ao comportamento da massa específica do fluido em relação as outras propriedades. A equação de estado do fluido, que não era tão importante na análise dos escoamentos incompressíveis, é vital na análise dos escoamentos compressíveis. É interessante ressaltar que as variações de temperatura encontradas nos escoamentos compressíveis normalmente são significativas e, assim, a equação da energia é muito importante. Fenômenos curiosos também podem ocorrer nos escoamentos compressíveis. Por exemplo, nós podemos detectar os seguintes fenômenos nos escoamentos compressíveis: acelerações provocadas pelo atrito, desacelerações em dutos convergentes, decréscimo da temperatura com aquecimento e formação de descontinuidades no escoamento (as propriedades do fluido variam de modo significativo nestes locais).

Para simplificar a nossa apresentação, nós consideraremos apenas os escoamentos em regime permanente, unidimensionais de gases perfeitos com viscosidade constante (ou nula). Neste capítulo, o escoamento unidimensional se refere aquele onde as distribuições das propriedades são uniformes em qualquer seção transversal do escoamento. Nós analisaremos tanto os escoamentos invíscidos ($\mu = 0$) quanto os víscidos ($\mu \neq 0$). Nossa experiência sugere que os gases e os vapores são muito mais compressíveis do que os líquidos, ou seja, eles podem apresentar uma variação de volume significativa quando ocorre uma alteração da pressão. Nós concentraremos nossa atenção aos escoamentos de gases porque estes são os mais encontrados nas aplicações da engenharia. Além disso, nós limitaremos nossa discussão aos escoamentos de gases perfeitos porque a equação de estados destes gases é muito simples e os resultados obtidos com este modelo representam bem as tendências detectadas nos escoamentos compressíveis de gases reais. A Ref. [1] apresenta um filme excelente sobre os escoamentos compressíveis e é um suplemento importante para o material coberto neste capítulo.

11.1 Gases Perfeitos

É interessante recordar o comportamento dos gases perfeitos antes de apresentar o desenvolvimento das equações que descrevem os escoamentos compressíveis. A equação de estado de um gás perfeito é

$$p = \rho R T \quad (11.1)$$

onde p é a pressão absoluta, ρ é a massa específica, R é a constante do gás e T é a temperatura. A constante do gás, R , apresenta um valor para cada gás ou mistura de gases e pode ser calculada por

$$R = \frac{8314,5}{M_{\text{gás}}} \text{ J/kg} \cdot \text{K} \quad (11.2)$$

onde $M_{\text{gás}}$ é o peso molecular do gás perfeito ou da mistura de gases perfeitos. A Tab. 1.6 apresenta valores de R para alguns gases. As equações de estado para gases reais estão fora do escopo deste livro e os leitores interessados neste tópico devem consultar a literatura (por exemplo, as Refs. [2 e 3]). É interessante ressaltar que as tendências encontradas nos escoamentos de gases ideais são parecidas com aquelas que serão detectadas nos escoamentos de gases reais. As duas referências citadas acima apresentam breves discussões sobre o escoamento compressível de gases reais (● 11.1 – Chama de gás).

A energia interna específica, \tilde{u} , de um gás perfeito só é função da temperatura (Refs. [2 e 3]). Assim, o calor específico a volume constante, c_v , pode ser expresso como

$$c_v = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} \right)_v = \frac{d\tilde{u}}{dT} \quad (11.3)$$

onde o subscrito v na derivada parcial indica que a diferenciação é realizada a volume específico constante, $v = 1/\rho$. Analisando a Eq. 11.3 é possível concluir que o calor específico de um gás perfeito só é função da temperatura. Assim,

$$d\tilde{u} = c_v dT$$

e

$$\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT \quad (11.4)$$

A Eq. 11.4 é útil porque ela nos permite calcular a variação de energia interna específica, $\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$, associada com um escoamento de gás perfeito entre a seções (1) e (2). Para simplificar mais ainda, considere que c_v é constante. Deste modo, a Eq. 11.4 fica reduzida a

$$\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad (11.5)$$

O valor do calor específico a volume constante normalmente varia com a temperatura (veja as Refs. [2 e 3]). Entretanto, a hipótese de calor específico constante é adequada se a variação de temperatura entre as seções (1) e (2) for moderada.

A propriedade termodinâmica entalpia específica, \tilde{h} , é definida por

$$\tilde{h} = \tilde{u} + \frac{p}{\rho} \quad (11.6)$$

A entalpia específica também só é função da temperatura porque a energia interna só depende da temperatura e a equação de estado para os gases perfeitos estabelece que $p/\rho = RT$. Deste modo,

$$\tilde{h} = \tilde{h}(T)$$

O calor específico a pressão constante, c_p , pode ser definido por

$$c_p = \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial T} \right)_p = \frac{d\tilde{h}}{dT} \quad (11.7)$$

onde o subscrito p na derivada parcial indica que a derivação é realizada a pressão constante. Note que c_p só depende da temperatura e, assim, a Eq. 11.7 pode ser simplificada para

$$d\tilde{h} = c_p dT$$

e

$$\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT \quad (11.8)$$

A Eq. 11.8 é útil porque ela nos permite calcular a variação de entalpia específica, $\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1$, associada com um escoamento de gás perfeito entre as seções (1) e (2). Para simplificar mais ainda, considere que c_p é constante. Deste modo, a Eq. 11.8 fica reduzida a

$$\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = c_p (T_2 - T_1) \quad (11.9)$$

O valor do calor específico a pressão constante normalmente varia com a temperatura (veja as Refs. [2 e 3]). Entretanto, a hipótese de calor específico constante é adequada se a variação de temperatura entre as seções (1) e (2) for moderada.

As Eqs. 11.5 e 11.9 nos mostram que as variações de energia interna específica e de entalpia específica estão relacionadas com as variações de temperatura através dos calores específicos. Nós agora vamos derivar uma equação que relaciona os calores específicos a pressão e a volume constantes. Combinando as Eqs. 11.6 e 11.1, temos

$$\tilde{h} = \tilde{u} + RT \quad (11.10)$$

Diferenciando esta equação,

$$d\tilde{h} = d\tilde{u} + R dT$$

ou

$$\frac{d\tilde{h}}{dT} = \frac{d\tilde{u}}{dT} + R \quad (11.11)$$

Combinando as Eqs. 11.3, 11.7 e 11.11, temos

$$c_p - c_v = R \quad (11.12)$$

A Eq. 11.12 indica que a diferença entre c_p e c_v é constante para um dado gás perfeito e que c_p sempre é maior do que c_v . Nós vamos definir a razão entre os calores específico, k , por

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (11.13)$$

Combinando as Eqs. 11.12 e 11.13,

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} \quad (11.14)$$

e

$$c_v = \frac{R}{k-1} \quad (11.15)$$

Os calores específicos dos gases perfeitos, c_p e c_v , e k variam com a temperatura mas, neste livro, nós vamos admitir que eles são constantes. A Tab. 1.6 apresenta alguns valores para k , referentes a temperatura ambiente, e R . Assim, os calores específicos dos gases da Tab. 1.6 podem ser avaliados com as Eqs. 11.13 e 11.14. O Exemplo 11.1 mostra como as variações de energia interna específica e de entalpia específica podem ser calculadas num escoamento de gás perfeito que apresenta calores específicos constantes.

Exemplo 11.1

Ar escoia em regime permanente entre as seções (1) e (2) de um tubo que apresenta diâmetro igual a 102 mm (veja a Fig. E11.1). As distribuições de pressão e de temperatura nas seções (1) e (2) são uniformes. Sabendo que $T_1 = 300$ K, $p_1 = 6,90$ bar (abs), $T_2 = 252$ K e $p_2 = 1,27$ bar (abs); determine: **(a)** a variação de energia interna específica entre as seções (1) e (2), **(b)** a variação de entalpia específica entre as seções (1) e (2) e **(c)** a variação de massa específica entre as seções (1) e (2).

Solução **(a)** Nós vamos admitir que o ar se comporta como um gás perfeito com calor específico constante. Assim, nós podemos utilizar a Eq. 11.5 para avaliar a variação de energia interna específica entre as seções (1) e (2), ou seja,

$$\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad (1)$$

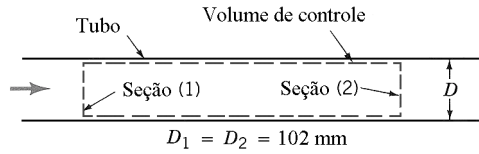


Figura E11.1

A Eq. 11.15 estabelece que

$$c_v = \frac{R}{k-1} \quad (2)$$

e a Tab. 1.6 fornece $R = 286,9 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ e $k = 1,4$. Neste capítulo nós só utilizaremos os valores de k e R indicados na Tab. 1.6 para resolver os exemplos. Assim,

$$c_v = \frac{286,9}{(1,4-1)} = 717,2 \text{ J/kg}\cdot\text{K} \quad (3)$$

Combinando as Eqs. (1) e (3),

$$\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 = 717,2 (252 - 300) = -3,4 \times 10^4 \text{ J/kg}$$

(b) Nós vamos utilizar a Eq. 11.9 para calcular a variação de entalpia específica,

$$\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = c_p (T_2 - T_1) \quad (4)$$

O calor específico a pressão constante pode ser calculado a partir do calor específico a volume constante e k . Deste modo,

$$c_p = k c_v = (1,4)(717,2) = 1004,1 \text{ J/kg}\cdot\text{K} \quad (5)$$

Combinando as Eqs. (4) e (5),

$$\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = 1004,1 (252 - 300) = -4,8 \times 10^4 \text{ J/kg}$$

(c) A variação de massa específica entre as seções (1) e (2) do escoamento pode ser calculada com a equação de estado dos gases perfeitos (Eq. 11.1).

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{p_2}{RT_2} - \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1}{R} \left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1} \right) \quad (6)$$

Utilizando os dados fornecidos na formulação do problema,

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{1}{286,9} \left(\frac{1,27 \times 10^5}{252} - \frac{6,90 \times 10^5}{300} \right) = -6,26 \text{ kg/m}^3$$

Esta variação de massa específica é significativa quando comparada com a massa específica do ar na seção (1), ou seja,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{6,90 \times 10^5}{(286,9)(300)} = 8,02 \text{ kg/m}^3$$

Note que os efeitos da compressibilidade do fluido são importantes neste escoamento.

As variações da propriedade entropia específica, s , são importantes na análise dos escoamentos compressíveis. Para qualquer substância pura, como um gás perfeito, a "primeira equação de Tds " é (consulte as Refs. [2 e 3])

$$T ds = d\tilde{u} + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (11.16)$$

onde T é a temperatura absoluta, s é a entropia específica, \tilde{u} é a energia interna específica, p é a pressão absoluta e ρ é a massa específica do fluido. Diferenciando a Eq. 11.6, temos

$$d\tilde{h} = d\tilde{u} + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right) dp \quad (11.17)$$

Combinando as Eqs. 11.16 e 11.17, obtemos

$$T ds = d\tilde{h} - \left(\frac{1}{\rho}\right) dp \quad (11.18)$$

A Eq. 11.18, as vezes, é denominada como "a segunda equação de Tds ". Admitindo que a substância pura é um gás perfeito e combinando as Eqs. 11.3 e 11.16, temos

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{1/\rho} d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (11.19)$$

Agora, se admitirmos que a substância pura é um gás perfeito, a combinação da Eq. 11.7 com a 11.18 fornece

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (11.20)$$

Se nós admitirmos que os calores específicos do gás perfeito são constantes, as Eqs. 11.19 e 11.20 podem ser integradas e fornecer

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (11.21)$$

e

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (11.22)$$

As Eqs. 11.21 e 11.22 nos permitem calcular a variação de entropia específica nos escoamentos de gases perfeitos que apresentam calores específicos constantes.

Exemplo 11.2

Determine a variação de entropia específica identificada entre as seções (1) e (2) do escoamento descrito no Exemplo 11.1.

Solução Nós vamos admitir novamente que o ar se comporta como um gás perfeito com calores específicos constantes. Nós podemos utilizar tanto a Eq. 11.21 quanto a 11.22 para calcular a variação de entropia específica no escoamento mas nós vamos utilizar as duas equações para mostrar que estas fornecem o mesmo resultado.

A Eq. 11.21 indica que

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (1)$$

A razão entre as massas específicas, ρ_1/ρ_2 , pode ser obtida a partir da equação de estado. Deste modo,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{p_1}{T_1}\right) \left(\frac{T_2}{p_2}\right) \quad (2)$$

Combinando as Eqs. (1) e (2),

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \left[\left(\frac{p_1}{T_1}\right) \left(\frac{T_2}{p_2}\right) \right] \quad (3)$$

Aplicando na equação os valores fornecidos na formulação do Exemplo 11.1, temos

$$s_2 - s_1 = (717,2) \ln \frac{252}{300} + (286,9) \ln \left[\left(\frac{6,90 \times 10^5}{300} \right) \left(\frac{252}{1,27 \times 10^5} \right) \right] = 310,5 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

A Eq. 11.22 indica que

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (4)$$

Aplicando os valores conhecidos na equação, temos,

$$s_2 - s_1 = (1004,1) \ln \frac{252}{300} - (286,9) \ln \frac{1,27}{6,90} = 310,5 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

Observe que os resultados fornecidos pelas Eqs. 11.21 e 11.22 são idênticos. Lembre sempre que as temperaturas e pressões utilizadas nestas equações são absolutas pois estamos lidando com gases perfeitos.

Se nós desejarmos incluir os efeitos da variação dos calores específicos com a temperatura na análise do escoamento é necessário integrar as Eqs. 11.4, 11.8 e 11.19 (ou 11.20) para obter as variações de energia interna, entalpia e entropia específicas. Este processo está explicado nas Refs. [2 e 3] e a Ref. [4] apresenta tabelas de propriedades termodinâmicas que podem ser utilizadas nas avaliações de processos que envolvem gases perfeitos com calores específicos não constantes.

A segunda lei da termodinâmica estabelece que a entropia específica é constante em qualquer escoamento adiabático e sem atrito, ou seja,

$$ds = 0$$

ou

$$s_2 - s_1 = 0$$

Os escoamentos que apresentam entropia específica constante são denominados isoentrópicos. Considere um escoamento isoentrópico de um gás perfeito que apresenta calores específicos constantes. Neste caso, as Eqs. 11.21 e 11.22 fornecem

$$c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (11.23)$$

Combinando a Eq. 11.23 com as Eqs. 11.14 e 11.15,

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (11.24)$$

Estas relações são muito úteis nas análises dos escoamentos isoentrópicos de gases perfeitos com calores específicos constantes. Analisando a Eq. 11.24 é possível concluir que

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \quad (11.25)$$

Lembre que este resultado é válido para processos isoentrópicos de gases perfeitos que apresentam calores específicos constantes.

11.2 Número de Mach e Velocidade do Som

O número de Mach, Ma, foi introduzido nos Caps. 1 e 7 como uma medida adimensional da compressibilidade do fluido no escoamento. Nesta seção, e nas próximas, nós desenvolveremos algumas relações úteis que envolvem o número de Mach. O número de Mach é definido como a razão entre o valor da velocidade local do escoamento, V , e a velocidade local do som, c , ou seja,

$$\text{Ma} = V / c$$

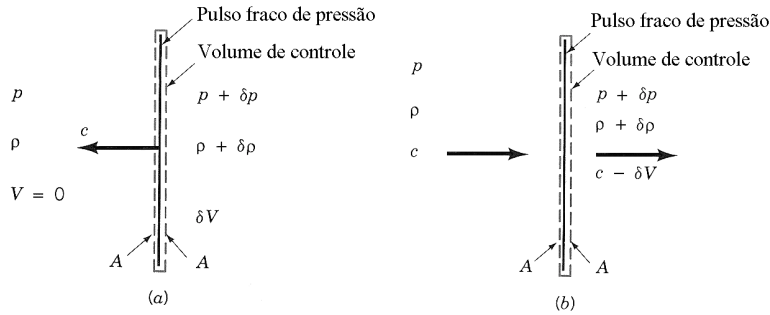


Figura 11.1 (a) Movimento de um pulso fraco de pressão num meio estacionário. (b) escoamento visto por um observador solidário ao volume de controle que contém o pulso de pressão.

Normalmente, o que nós percebemos como som é uma consequência dos pulsos fracos de pressão que se deslocam pelo ar. Quando nossos ouvidos respondem a uma sucessão de pulsos móveis de pressão nós escutamos os sons.

Para entender melhor a noção de velocidade do som, nós vamos analisar o comportamento de um pulso fraco de pressão que é unidimensional, apresenta espessura infinitesimal e se desloca com a velocidade do som num meio estacionário (veja a Fig. 11.1a). Note que a velocidade do fluido é nula, a pressão é p e a massa específica do fluido é ρ a montante do pulso de pressão. A velocidade do fluido foi alterada para δV , a pressão e a massa específica também foram alteradas por quantidades δp e $\delta \rho$ a jusante da onda. Nós vamos utilizar um volume de controle com espessura infinitesimal que se desloca com o pulso para analisar este fenômeno (veja a Fig. 11.1a). Nós também vamos considerar que a velocidade do pulso fraco de pressão é constante e unidirecional. Observe que, nestas condições, o nosso volume de controle é inercial.

Um observador que se move solidariamente com o volume de controle (Fig. 11.1b) descreveria este escoamento do seguinte modo: o fluido entra no volume com velocidade c , pressão p e massa específica ρ e o deixa com velocidade $c - \delta V$, pressão $p - \delta p$ e massa específica $\rho - \delta \rho$. O resultados da aplicação da equação da continuidade (Eq. 5.16) ao escoamento neste volume de controle é

$$\rho A c = (\rho + \delta \rho) A (c - \delta V) \quad (11.26)$$

ou

$$\rho c = \rho c - \rho \delta V + c \delta \rho - (\delta \rho)(\delta V) \quad (11.27)$$

Nós podemos desprezar o termo $(\delta \rho)(\delta V)$ porque ele é muito menor do que os outros termos da equação. Nesta condição,

$$\rho \delta V = c \delta \rho \quad (11.28)$$

A equação da quantidade de movimento linear (Eq. 5.29) também pode ser aplicada ao escoamento através do volume de controle indicado na Fig. 11.1b. O resultado desta aplicação é

$$-c \rho c A + (c - \delta V)(\rho + \delta \rho)(c - \delta V) A = p A - (p + \delta p) A \quad (11.29)$$

Observe que esta equação não contém um termo referente aos efeitos viscosos porque nós modelamos o escoamento como invíscido. Combinando as Eqs. 11.26 e 11.29, temos

$$-c \rho c A + (c - \delta V) \rho A c = -\delta p A$$

ou

$$\rho \delta V = \frac{\delta p}{c} \quad (11.30)$$

Agora, se combinarmos esta equação (quantidade de movimento) com a Eq. 11.28 (continuidade), obtemos

$$c^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}$$

ou

$$c = \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} \right)^{1/2} \quad (11.31)$$

Esta expressão para a velocidade do som é o resultado da aplicação das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento linear ao escoamento no volume de controle indicado na Fig. 11.1*b*. Lembre que estas equações também foram utilizadas na Sec. 10.2.1 para fornecer uma expressão para a velocidade de uma onda que se deslocava na superfície livre de um canal.

A equação da energia (Eq. 5.103) também pode ser aplicada ao escoamento no volume de controle indicado a Fig. 11.1*b*. O resultado desta aplicação é

$$\frac{\delta p}{\rho} + \delta \left(\frac{V^2}{2} \right) + g \delta z = \delta (\text{perda}) \quad (11.32)$$

O termo referente a variação de energia potencial é muito pequeno em relação aos outros termos da equação e, se nós admitirmos que o escoamento é invíscido, o termo δ (perda) é nulo. Nestas condições, a equação anterior fica reduzida a

$$\frac{\delta p}{\rho} + \frac{(c - \delta V)^2}{2} - \frac{c^2}{2} = 0$$

Se desprezarmos $(\delta V)^2$ em relação a $c\delta V$, nós obtemos

$$\rho \delta V = \frac{\delta p}{c} \quad (11.33)$$

Combinando a equação da continuidade (Eq. 11.28) com a da energia (Eq. 11.33), nós encontramos

$$c = \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} \right)^{1/2}$$

Note que esta equação é idêntica a Eq. 11.31. Assim, a equação da quantidade de movimento linear e a de conservação de energia levam ao mesmo resultado. O escoamento no volume de controle indicado na Fig. 11.1*b* será isoentrópico se nós admitirmos que o escoamento além de invíscido é adiabático (sem transferência de calor). Nós temos que $\delta p \rightarrow \partial p$ quando δp é muito pequeno. Nesta situação,

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} \quad (11.34)$$

onde o subscrito s é utilizado para indicar que a diferenciação ocorre a entropia constante.

A Eq. 11.34 nos mostra que é possível calcular a velocidade do som pela determinação da derivada parcial da pressão em relação a massa específica num processo onde a entropia é constante. Nós vimos que

$$p = (\text{constante}) \rho^k$$

é válida nos escoamentos isoentrópicos de um gás perfeito que apresenta calores específicos constantes. Nestas situações,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = (\text{constante}) k \rho^{k-1} = \frac{p}{\rho^k} k \rho^{k-1} = \frac{p}{\rho} k = RTk \quad (11.35)$$

Nós concluímos que a velocidade do som num gás perfeito que apresenta calores específicos constantes é dada por

$$c = (kRT)^{1/2} \quad (11.36)$$

Um procedimento mais geral para obter a velocidade do som é baseado na utilização do módulo de elasticidade volumétrico, E_v (veja a Sec. 1.7.1). Este módulo, que também é aplicável a líquidos, é definido por

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (11.37)$$

Combinando a Eq. 11.34 e 11.37, temos

$$c = (E_v / \rho)^{1/2} \quad (11.38)$$

As tabelas do Apen. B apresentam vários valores da velocidade do som na água e no ar. A experiência nos mostra que é muito mais fácil comprimir ar do que água. Note que os valores da velocidade do som no ar são muito menores do que as velocidades do som na água. A Eq. 11.37 nos mostra que a velocidade do som seria infinita se o fluido fosse realmente incompressível (i.e., o módulo de elasticidade volumétrico do fluido é infinito). Isto mostra que o modelo de escoamento incompressível é apenas uma aproximação dos escoamentos reais.

Exemplo 11.3

Determine a velocidade do som no ar a 0°C e a compare com o valor fornecido no Apen. B.

Solução Nós encontramos no Apen. B que a velocidade do som no ar a 0 °C é 331,4 m/s. Se nós admitirmos que o ar se comporta como um gás perfeito que apresenta calores específicos constantes, a velocidade do som pode ser calculada com a Eq. 11.36, ou seja,

$$c = (kRT)^{1/2} \quad (1)$$

A Tab. 1.6 indica que o valor da constante do gás, R , é 286,9 J/(kg·K) e o Apen. B mostra que $k = 1,401$. Aplicando estes valores na Eq. (1),

$$c = [(286,9)(273,15)(1,401)]^{1/2} = 331,4 \text{ m/s}$$

O valor da velocidade do som calculado com a Eq. 11.36 é igual ao fornecido no Apen. B.

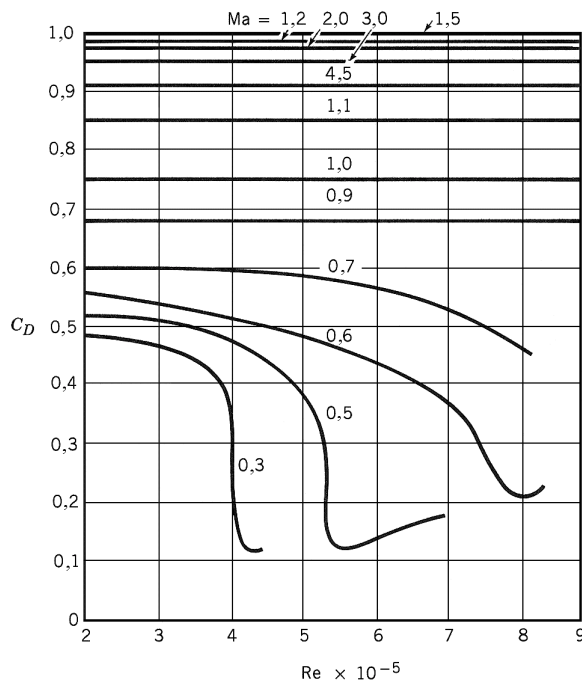


Figura 11.2 Coeficiente de arrasto de uma esfera em função dos números de Reynolds e Mach (Adaptado da Ref. [1] do Cap. 9).

11.3 Tipos de Escoamentos Compressíveis

Nós mostramos na Sec. 3.8.1 que os efeitos da compressibilidade ficam mais significativos quando o número de Mach aumenta. Por exemplo, o erro associado com a utilização de $\rho V^2/2$ no cálculo da pressão de estagnação num gás perfeito aumenta com o crescimento do número de Mach. Nós concluímos, a partir da análise da Fig. 3.24, que os escoamentos só podem ser modelados como incompressíveis se o número de Mach for baixo.

A experiência mostra que a compressibilidade pode influenciar muito as outras variáveis do escoamento. Por exemplo, a Fig. 11.2 mostra o comportamento do coeficiente de arrasto de uma esfera em função dos números de Reynolds e Mach. Observe que os efeitos da compressibilidade do fluido são bastante importantes.

Nós vamos considerar uma situação simples para ilustrar algumas características curiosas dos escoamentos compressíveis. Imagine uma fonte pontual de pulsos de pressão imersa num fluido. As ondas de pressão são esféricas e expandem radialmente (para fora) da fonte pontual com velocidade igual a do som, c . Se as ondas de pressão são emitidas em instantes t_{onda} , o raio das ondas esféricas no instante t pode ser calculada por

$$r = (t - t_{\text{onda}})c$$

A Fig. 11.3a mostra o formato simétrico das ondas geradas por uma fonte estacionária

O formato das ondas de pressão deixa de ser simétrico quando a fonte pontual se desloca para a esquerda com velocidade V . As Figs. 11.3b, 11.3c e 11.3d mostram os formatos das ondas em $t = 3$ s para valores diferentes de V . Os pontos indicados por "+" são as posições da fonte pontual móvel nos instantes 0 s, 1 s, 2 s e 3 s. É importante conhecer a posição da fonte pontual nos diversos instantes para que seja possível identificar onde as diferentes ondas foram geradas.

Nós podemos tirar várias conclusões se analisarmos os formatos das ondas de pressão mostradas na Fig. 11.3. É importante, neste ponto, observar que os formatos das ondas geradas por uma fonte pontual móvel que se desloca para a esquerda com velocidade V são iguais aos formatos das ondas geradas por uma fonte imóvel imersa num fluido que escoar para a direita com velocidade V . Assim, a Fig. 11.3 é adequada para a análise destas duas situações.

O formato da onda de pressão é simétrico quando a fonte pontual e o fluido estão imóveis (Fig. 11.3a). Assim, um observador posicionado em qualquer ponto do campo de escoamento ouvirá o mesmo som (mesma frequência) que foi gerado na fonte pontual. Quando a velocidade da fonte (ou do fluido) é pequena em relação a velocidade do som, o formato das ondas de pressão ainda será quase simétrico. A velocidade do som num fluido incompressível é infinitamente grande. Deste modo, uma fonte pontual estacionária e fluido estacionário é o caso típico que representa os escoamentos incompressíveis. A comunicação dos pulsos de pressão através do campo de escoamento é irrestrita e instantânea ($c = \infty$) nos escoamentos "realmente incompressíveis".

O formato das ondas de pressão deixa de ser simétrico quando a fonte móvel se desloca através de um fluido parado (ou quando o fluido se move e a fonte está estacionária). Observe que a deformação das ondas de pressão varia em função da razão entre a velocidade do fonte (ou do fluido) e a velocidade do som. Quando $V/c < 1$, o formato das ondas é similar ao mostrado na Fig. 11.3b. Este escoamento é considerado subsônico e compressível. Um observador estacionário ouvirá um som com frequência diferente daquele emitido pela fonte e a diferença de frequência é função da posição ocupada pelo observador (isto ocorre porque o formato das ondas é assimétrico). Este fenômeno é conhecido como efeito Doppler. A informação da pressão ainda pode se propagar irrestritamente no campo de escoamento mas o processo não é simétrico ou instantâneo.

Quando $V/c = 1$, as ondas de pressão não estão presentes a frente da fonte pontual móvel e o escoamento é denominado sônico. Você não escutaria o som emitido pela fonte móvel se estiver posicionado a esquerda da fonte até que sua posição fique coincidente com a da fonte. Note que todas as ondas de pressão são tangentes a um plano perpendicular ao escoamento em torno da fonte pontual estacionária que apresenta velocidade igual a do som ($V/c = 1$). Isto nos sugere que ocorre uma variação significativa de pressão neste plano. Este plano é conhecido como onda de Mach. Observe que, neste caso, a comunicação de uma informação de pressão está restrita a região posicionada a jusante da onda de Mach. A região do escoamento a montante da onda de Mach é denominada zona de silêncio e a região a jusante do plano tangente é denominada zona de ação.

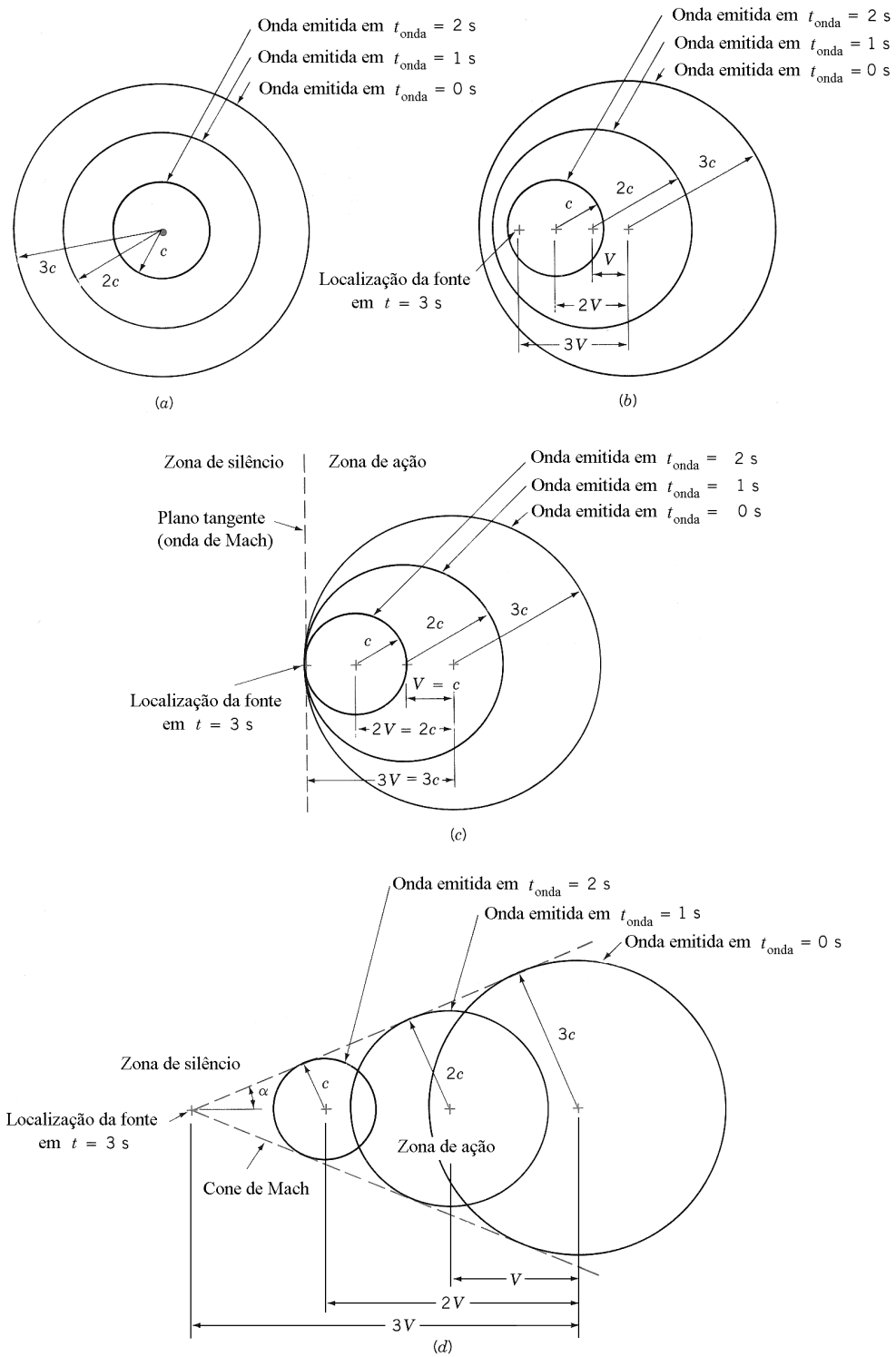


Figura 11.3 (a) Ondas de pressão em $t = 3$ s, $V = 0$; (b) Ondas de pressão em $t = 3$ s, $V < c$; (c) Ondas de pressão em $t = 3$ s, $V = c$ e (d) Ondas de pressão em $t = 3$ s, $V > c$.

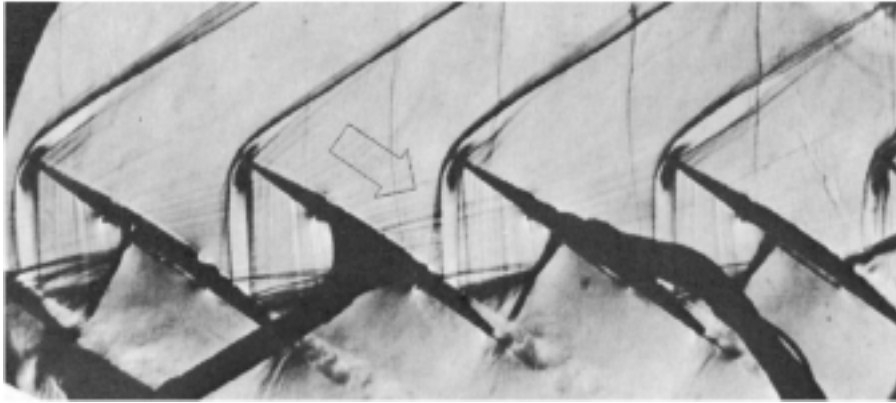


Figura 11.4 Visualização do escoamento numa fileira de palhetas de um compressor com a técnica schlieren (Fotografia fornecida pelo Dr. Hans Starcken do DLR Köln - Porz, Alemanha).

Quando $V > c$ o escoamento é supersônico e o formato das ondas de pressão é parecido com o esboçado na Fig. 11.3d. O cone (cone de Mach) que é tangente às ondas de pressão pode ser construído para representar a onda de Mach que separa a zona de silêncio da de ação. A comunicação da informação de pressão está restrita a zona de ação. Analisando a Fig. 11.3d nós podemos concluir que o ângulo do cone, α , é dado por

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{\text{Ma}} \quad (11.39)$$

Esta equação é sempre utilizada para relacionar o ângulo do cone de Mach, α , com o número de Mach do escoamento supersônico. A concentração das ondas de pressão na superfície do cone de Mach sugere que neste local nós vamos encontrar uma variação significativa de pressão e de massa específica. Nós podemos visualizar uma variação abrupta de massa específica utilizando uma instrumentação óptica. Os métodos de visualização de escoamentos mais comuns são o schlieren e o interferométrico (veja a Ref. [5]). A Fig. 11.4 mostra uma fotografia schlieren do escoamento compressível numa fileira de palhetas de um compressor. O escoamento na seção de alimentação da fileira é supersônico ($\text{Ma}_1 = 1,14$) e é subsônico na seção de descarga da fileira ($\text{Ma}_2 = 0,86$). Observe, na figura, que as duas palhetas centrais contêm orifícios para a medida de pressão e que estes estão conectados a duas mangueiras. As regiões com variações significativas de massa específica aparecem na região supersônica do escoamento. Note, também, que a fotografia mostra a separação do escoamento nas palhetas (● 11.2 – Visualização de escoamento compressível).

A discussão sobre os pulsos de pressão e a análise do aspecto das ondas de pressão sugere que os escoamentos podem ser classificados do seguinte modo:

1. Escoamento incompressível: $\text{Ma} \leq 0,3$. A comunicação dos pulsos de pressão é irrestrita, instantânea e praticamente simétrica.
2. Escoamento subsônico compressível: $0,3 < \text{Ma} < 1,0$. A comunicação dos pulsos de pressão é irrestrita mas é assimétrica.
3. Escoamento supersônico compressível: $\text{Ma} \geq 1,0$. Formação da onda de Mach e a comunicação dos pulsos de pressão está restrita à zona de ação.

Adicionalmente a esta classificação, os escoamentos com $0,9 \leq \text{Ma} \leq 1,2$ são subclassificados como transônicos e os que apresentam $\text{Ma} > 5$ são denominados hipersônicos. Os escoamentos nos aviões modernos e em muitas turbinas a gás são transônicos e o escoamento em torno do ônibus espacial na reentrada é hipersônico. Note que os aviões do futuro deverão operar da condição subsônica até a hipersônica.

Exemplo 11.4

Um avião voa numa altitude 1000 m acima do plano onde está localizado um observador. Determine o intervalo de tempo decorrido entre o avião passar sobre o observador e ele ouvir o som do avião sabendo que o avião voa com número de Mach igual a 1,5 e que a temperatura na atmosfera é uniforme e igual a 20 °C.

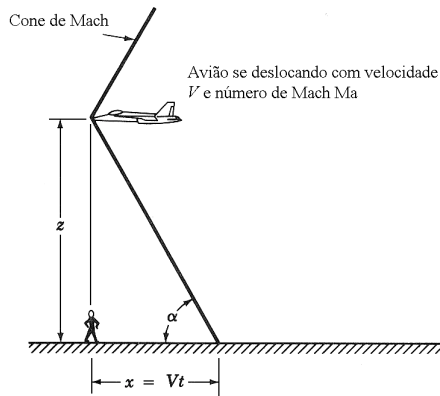


Figura E11.4

Solução Nós podemos imaginar que o cone de Mach é criado no "nariz" do avião (veja a Fig. E11.4) porque este está se deslocando com velocidade supersônica. Note que o "som" do avião é detectado quando a superfície do cone alcança o observador. O ângulo α da Fig. E11.4 está relacionado com a altitude de vôo, z , e com a distância horizontal, x , por

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{z}{x} = \tan^{-1} \frac{1000}{Vt} \quad (1)$$

Nós vamos admitir que a variação do número de Mach com a elevação é desprezível. Assim, nós podemos utilizar a Eq. 11.39 para relacionar o número de Mach com o ângulo α , ou seja,

$$\text{Ma} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (2)$$

Combinando as Eqs. (1) e (2),

$$\text{Ma} = \frac{1}{\sin \left[\tan^{-1} (1000/Vt) \right]} \quad (3)$$

A velocidade do avião está relacionada com o número de Mach através de

$$V = (\text{Ma})c \quad (4)$$

onde c é a velocidade do som. A tabela do Apên. B indica que $c = 343,3$ m/s para $T = 20$ °C. Combinando as Eqs. (3) e (4) e lembrando que $\text{Ma} = 1,5$, temos

$$1,5 = \frac{1}{\sin \left[\tan^{-1} (1000 / (1,5 \times 343,3)t) \right]}$$

ou

$$t = 2,17 \text{ s}$$

11.4 Escoamento Isoentrópico de um Gás Perfeito

Nós consideraremos mais detalhadamente, nesta seção, o escoamento unidimensional e isoentrópico de um gás perfeito que apresenta calores específicos constantes. Por enquanto, nós não consideraremos o trabalho de eixo. Como nós já indicamos no início deste capítulo, as distribuições das propriedades dos fluidos são uniformes nos escoamentos unidimensionais (as propriedades do fluido só podem variar na direção do escoamento). Nós vamos considerar os escoamentos através de volumes de controle finitos que apresentam distribuições uniformes de velocidade e propriedades em todas as seções transversais do volume de controle. Boa parte do material que nós desenvolveremos também é aplicável ao escoamento de uma partícula fluida ao longo de sua trajetória.

Os escoamentos adiabáticos e invíscidos são isoentrópicos. Assim, é impossível encontrar um escoamento adiabático isoentrópico porque todos os fluidos são viscosos. Apesar disto, o estudo dos escoamentos isoentrópicos é importante porque fornece as tendências encontradas nos escoamentos compressíveis reais

11.4.1 Efeito da Variação da Seção Transversal de Escoamento

Considere o escoamento em regime permanente de um fluido num conduto que apresenta seção transversal variável. A aplicação da equação da conservação da massa a este escoamento resulta em

$$\dot{m} = \rho AV = \text{constante} \quad (11.40)$$

Se o escoamento é incompressível, a massa específica do fluido é constante e a velocidade do escoamento varia inversamente com a área da seção transversal do conduto. Entretanto, quando o escoamento é compressível, a massa específica e a velocidade do escoamento variam ao longo do conduto. Nós determinaremos como variam a massa específica e a velocidade do escoamento ao longo do conduto para o escoamento isoentrópico de um gás perfeito em regime permanente.

No Cap. 3 nós aplicamos a segunda lei de Newton a uma partícula fluida que pertencia a um escoamento invíscido e que ocorria em regime permanente. O resultado da aplicação desta lei, na direção da linha de corrente (Eq. 3.5), é (lembre que esta aplicação é válida tanto em escoamentos incompressíveis quanto em compressíveis)

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(V^2) + \gamma dz = 0 \quad (11.41)$$

O escoamento no conduto pode ser descrito por esta equação se ele puder ser modelado como unidimensional (porque, neste caso, cada partícula do fluido estará sujeita ao mesmo processo entre as seções do volume de controle considerado). O termo referente a diferença de energia potencial, γdz , pode ser desprezado nos escoamentos de gases porque ele é muito menor do que os outros termos da equação. Assim, a equação apropriada para descrever o movimento na direção das linhas de corrente do escoamento em regime permanente de um gás perfeito, adiabático, unidimensional e isoentrópico (adiabático e sem atrito) que pode ser obtida a partir da Eq. 11.41 é

$$\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V} \quad (11.42)$$

A aplicação do logaritmo nos dois lados da Eq. 11.40 fornece

$$\ln \rho + \ln A + \ln V = \text{constante} \quad (11.43)$$

Diferenciando esta equação, obtemos

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

ou

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} \quad (11.44)$$

Combinando as Eqs. 11.42 e 11.44,

$$\frac{dp}{\rho V^2} \left(1 - \frac{V^2}{dp/d\rho} \right) = \frac{dA}{A} \quad (11.45)$$

A velocidade do som está relacionada com as variações de pressão e massa específica através da Eq. 11.34, ou seja, $c = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$. Combinando esta equação com a definição do número de Mach

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} \quad (11.46)$$

e com a Eq. 11.45, obtemos

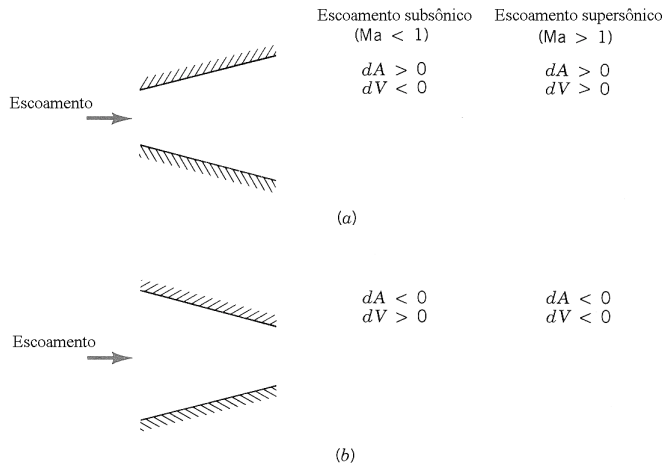


Figura 11.5 (a) duto divergente, (b) duto convergente.

$$\frac{dp}{\rho V^2} (1 - Ma^2) = \frac{dA}{A} \quad (11.47)$$

Esta equação combinada com a Eq. 11.42 fornece

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A} \frac{1}{(1 - Ma^2)} \quad (11.48)$$

A Eq. 11.48 mostra que as variações de velocidade do escoamento são opostas as variações de área quando o escoamento é subsônico ($Ma < 1$). Em outras palavras, a velocidade do escoamento subsônico num duto divergente, como o mostrado na Fig. 11.5a, diminui ao longo do escoamento e a velocidade do escoamento subsônico aumenta ao longo do duto convergente indicado na Fig. 11.5b. Estas tendências estão consistentes com o comportamento dos escoamentos incompressíveis analisados nos Caps. 3 e 8.

A Eq. 11.48 também serve para mostrar que as variações de velocidade e área ocorrem no mesmo sentido se o escoamento é supersônico ($Ma > 1$). Assim, o escoamento supersônico no duto divergente mostrado na Fig. 11.5a será acelerado e desacelerado no duto convergente mostrado na Fig. 11.5b. Note que os comportamentos dos escoamentos subsônico e supersônico em dutos com área da seção transversal variável são opostos.

Para entender melhor porque os comportamentos dos escoamentos subsônicos e supersônicos são tão diferentes nós vamos analisar o problema de outro modo. Combinando as Eqs. 11.44 e 11.48, temos

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dA}{A} \frac{Ma^2}{(1 - Ma^2)} \quad (11.49)$$

A Eq. 11.49 mostra que as variações de massa específica e de área da seção transversal do duto ocorrem no mesmo sentido se o escoamento é subsônico ($Ma < 1$) e em sentidos opostos quando o escoamento é supersônico ($Ma > 1$). Como ρAV precisa permanecer constante (veja a Eq. 11.40), a massa específica do fluido deve aumentar ($d\rho > 0$) ao longo do escoamento subsônico no duto divergente ($dA > 0$). Estas três condições impõe que a velocidade do escoamento ao longo do duto divergente deve diminuir. Entretanto, se o escoamento no duto é supersônico, o aumento de área provoca uma diminuição de massa específica suficiente para que a velocidade do escoamento aumente ao longo do duto.

Rearranjando a Eq. 11.48, nós obtemos

$$\frac{dA}{dV} = -\frac{A}{V} (1 - Ma^2) \quad (11.50)$$

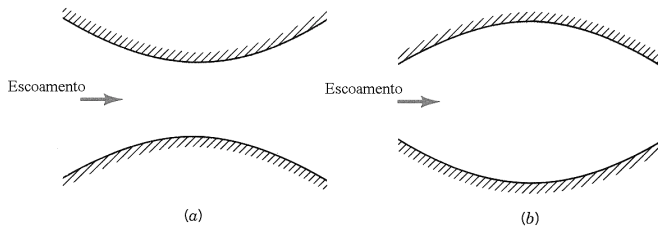


Figura 11.6 (a) Bocal convergente - divergente e (b) Bocal convergente - divergente.

Esta equação nos indica que $dA/dV = 0$ quando $Ma = 1$. Este resultado sugere que a área associada a $Ma = 1$ é mínima ou máxima.

A Fig. 11.6a mostra o esboço de um duto convergente – divergente (também conhecido como bocal convergente - divergente). Note que este duto apresenta uma seção com área mínima (garganta do bocal). A Eq. 11.48 mostra que a velocidade do escoamento pode aumentar se o escoamento na seção de entrada do bocal for subsônico. Assim, é possível que o número de Mach na garganta do bocal seja igual a 1 (onde a área da seção transversal é mínima). A Eq. 11.48 também indica que a velocidade diminui na região convergente do bocal se o escoamento na seção de alimentação do bocal for supersônico e que este escoamento pode se tornar sônico ($Ma = 1$) na garganta do bocal.

A Fig. 11.6b mostra um duto divergente – convergente. Note que, neste arranjo, existe uma seção com área máxima. Se o escoamento na seção de alimentação do duto é subsônico, a velocidade diminui ao longo da região divergente do duto e não é possível atingir a velocidade sônica. Agora, se escoamento na seção de alimentação do duto é supersônico, a velocidade aumenta ao longo da região divergente do duto e, novamente, não é possível atingir a velocidade sônica.

Assim, nós concluímos que a condição sônica ($Ma = 1$) só pode ser atingida na garganta do duto convergente – divergente. Lembre que nós utilizamos as hipótese de que o escoamento é isoentrópico, que o fluido se comporta como um gás perfeito e que o regime do escoamento é o permanente. Adicionalmente, é necessário utilizar um bocal convergente – divergente para obter um escoamento supersônico a partir de um escoamento subsônico. Note que o duto convergente – divergente também pode ser utilizado para transformar um escoamento supersônico num subsônico. As seções de teste de túneis de vento normalmente estão localizadas a jusante de um bocal convergente – divergente e montadas a montante de outro duto convergente – divergente (nesta condição operacional, o duto pode ser considerado como um difusor pois a velocidade diminui ao longo do duto, veja a Ref. [1]). Nós discutiremos nas próximas seções mais alguns detalhes sobre os escoamentos isoentrópicos de gases perfeitos em dutos com seção transversal variável.

11.4.2 Escoamentos em Dutos Convergente - Divergente

Na seção anterior nós analisamos a variação da massa específica e da velocidade no escoamento isoentrópico de um gás perfeito que ocorre num duto que apresenta área da seção transversal variável. Nós agora vamos desenvolver as equações que descrevem estes escoamentos.

Normalmente é conveniente utilizar o estado de estagnação do fluido como um estado de referência na análises dos escoamentos compressíveis. O estado de estagnação está associado com velocidade nula e um valor de entropia que corresponde a entropia do fluido que esco. O subscrito 0 é utilizado para indicar o estado de estagnação. Por exemplo, a temperatura e a pressão de estagnação são indicadas por T_0 e p_0 . Se o fluido que esco no duto convergente – divergente indicado na Fig. 11.6a foi retirado isoentropicamente da atmosfera, a pressão e a temperatura atmosférica definem o estado de estagnação do escoamento. O estado de estagnação também pode ser atingido por uma desaceleração isoentrópica do escoamento. Isto pode ser realizado num duto divergente, nos escoamentos subsônicos, e num duto convergente – divergente se o escoamento for supersônico. Nós discutimos, no Cap. 3, que a desaceleração do escoamento em torno do tubo de Pitot estático é aproximadamente isoentrópica (veja a Fig. 3.6). Assim, é possível medir, com uma pequena incerteza, os valores da pressão de estagnação, p_0 , e a temperatura de estagnação, T_0 , num escoamento.

Nós mostramos, na Sec. 11.1, que a relação (veja a Eq. 11.25)

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$$

é válida num processo isoentrópico de um gás perfeito. A equação do movimento na direção da linha de corrente válida para o escoamento invíscido de um gás perfeito (Eq. 11.41) pode ser expressa por

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (11.51)$$

Lembre que nós desprezamos o termo referente a variação de energia potencial porque ele é muito menor do que os outros termos da equação.

Combinando as Eqs. 11.25 e 11.51, obtemos

$$\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \frac{dp}{(p)^{1/k}} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (11.52)$$

Considere o escoamento isoentrópico e em regime permanente de um gás perfeito com calores específicos constantes no bocal convergente – divergente mostrado na Fig. 11.6a. Note que a Eq. 11.52 pode ser aplicada neste tipo de escoamento. Assim, nós podemos integrá-la entre o estado de estagnação e o estado referente a qualquer seção transversal do escoamento. Deste modo,

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) - \frac{V^2}{2} = 0 \quad (11.53)$$

Se aplicarmos a equação de estado do gás perfeito na Eq. 11.53, obtemos

$$\frac{kR}{k-1} (T_0 - T) - \frac{V^2}{2} = 0 \quad (11.54)$$

Agora, se combinarmos esta equação com a Eq. 11.14,

$$c_p (T_0 - T) - \frac{V^2}{2} = 0$$

Rearranjando a equação e lembrando da definição de entalpia específica,

$$\tilde{h}_0 - \left(\tilde{h} - \frac{V^2}{2} \right) = 0 \quad (11.55)$$

onde \tilde{h}_0 é a entalpia de estagnação. Nós também podemos obter esta equação aplicando a primeira lei da termodinâmica (Eq. 5.69) ao escoamento no duto que estamos considerando. Note que a entalpia específica de estagnação deste escoamento é constante.

Se combinarmos a definição do número de Mach (Eq. 11.46) com a equação da velocidade do som em gases perfeitos (Eq. 1.36) e com a Eq. 11.54, obtemos

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}^2} \quad (11.56)$$

Esta equação nos permite nos calcular a temperatura do escoamento ao longo do bocal convergente – divergente desde que conheçamos o valor do número de Mach local e a temperatura de estagnação. É importante lembrar que esta equação só é válida para escoamentos isoentrópicos, de um gás perfeito que apresenta calores específicos constantes e que ocorrem em regime permanente. Nós também podemos desenvolver uma equação para a distribuição de pressão neste escoamento. Como $p/\rho = RT$,

$$\left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) = \frac{T}{T_0} \quad (11.57)$$

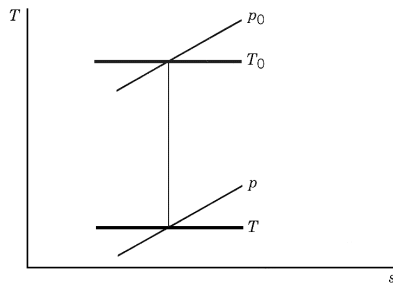


Figura 11.7 Diagrama $T - s$ que relaciona o estado de estagnação e o estático.

Combinando este resultado com a Eq. 11.25,

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{k/(k-1)} \quad (11.58)$$

Agora, se aplicarmos esta equação na Eq. 11.56, temos

$$\frac{p}{p_0} = \left\{ \frac{1}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}^2} \right\}^{k/(k-1)} \quad (11.59)$$

As variações de massa específica podem ser descritas por uma equação que é obtida a partir da combinação das Eqs. 11.56, 11.57 e 11.59, ou seja,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left\{ \frac{1}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}^2} \right\}^{1/(k-1)} \quad (11.60)$$

A utilização dos diagramas temperatura – entropia específica (diagrama $T - s$) facilita bastante a análise dos escoamentos compressíveis. A Fig. 11.7 mostra o diagrama $T - s$ referente a este processo. A linha vertical da figura representa o escoamento entre o estado de estagnação e qualquer estado encontrado no bocal convergente – divergente. Observe que as Eqs. 11.56 e 11.59 indicam que a temperatura e a pressão no fluido diminuem com o aumento do número de Mach.

Um modo de produzir o escoamento num duto convergente – divergente, como o mostrado na Fig. 11.6a, é conectando uma bomba de vácuo à seção de descarga do duto. Quando a pressão na seção de descarga do duto decresce um pouco, ar começará a escoar da atmosfera para a bomba de vácuo através do duto. Nós podemos utilizar as Eqs. 11.56, 11.59, 11.60 e um diagrama $T - s$ para descrever o escoamento em regime permanente no duto convergente – divergente. Lembre que isto só será possível se desprezarmos o atrito e a transferência de calor para o escoamento e admitirmos que o ar se comporta como um gás perfeito.

Se a pressão na seção de descarga do duto só é um pouco menor do que a pressão atmosférica, a Eq. 11.59 indica que os números de Mach do escoamento são baixos. Nesta condição, a Eq. 11.60 mostra que as variações de massa específica no escoamento também são baixas e a equação da continuidade (Eq. 11.40) nos mostra que existe uma aceleração do escoamento na região convergente do duto e uma desaceleração na região divergente do duto. Lembre que nós já consideramos um escoamento deste tipo na análise do medidor Venturi (veja a Sec. 3.6.3). A Fig. 11.8 mostra o diagrama $T - s$ relativo a este escoamento.

Nós agora vamos analisar o que ocorre quando a pressão na seção de descarga do duto é reduzida. Como o escoamento inicia do repouso, e bem a montante da seção de alimentação do duto mostrado na Fig. 11.6a, as Eqs. 11.48 e 11.50 mostram que o escoamento pode ser acelerado até que o número de Mach na garganta do duto seja igual a 1. Agora, se baixarmos ainda mais a pressão na seção de descarga, o escoamento na região convergente do duto não será alterado porque, como discutimos na Sec. 11.3, a informação da variação de pressão não se propaga a montante da garganta quando $\text{Ma} = 1$ neste local. Nós denominamos que o escoamento está bloqueado quando $\text{Ma} = 1$ na garganta do duto convergente – divergente. A seguir, nós vamos desenvolver as equações que descrevem o escoamento bloqueado.

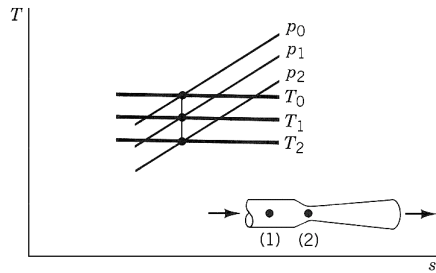


Figura 11.8 Diagrama $T - s$ para o escoamento no medidor Venturi.

Nós já utilizamos o estado de estagnação, onde $Ma = 0$, como um estado de referência. É também interessante trabalharmos com outro estado de referência que é definido por $Ma = 1$ e entropia igual àquela do fluido que escoar no duto. Este estado é conhecido como estado crítico e é indicado por $()^*$.

A razão entre a pressão na garganta do duto convergente – divergente quando o escoamento está bloqueado, p^* , e a pressão de estagnação é denominada razão de pressão crítica. Como $Ma = 1$ nesta condição, a Eq. 11.59 fornece

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \quad (11.61)$$

Se $k = 1,4$, que é o valor nominal para o ar, temos

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,528 \quad (11.62)$$

A pressão de estagnação do escoamento que estamos considerando é a atmosférica, p_{atm} . Assim, a pressão na garganta referente ao escoamento bloqueado é

$$p_{k=1,4}^* = 0,528 p_{atm} \quad (11.63)$$

A relação entre a temperatura na garganta referente ao escoamento bloqueado e a temperatura de estagnação, T^*/T_0 , pode ser calculada com a Eq. 11.56. Assim,

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (11.63)$$

Se $k = 1,4$; temos

$$\left(\frac{T^*}{T_0} \right)_{k=1,4} = 0,833 \quad (11.64)$$

Como a temperatura de estagnação do problema que estamos considerando é a atmosférica,

$$T_{k=1,4}^* = 0,833 T_{amb}$$

As pressões e temperaturas de estagnação e críticas deste escoamento estão mostradas no diagrama $T - s$ esboçado na Fig. 11.9.

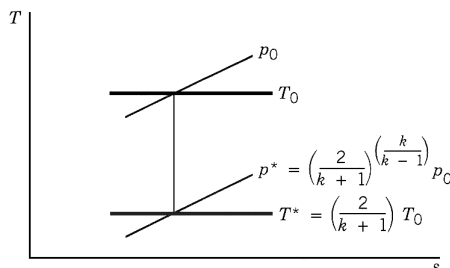


Figura 11.9 Relação entre os estados de estagnação e crítico.

Se nos combinarmos a equação de estado de gás perfeito (Eq. 11.1) com as Eqs. 11.61 e 11.63 e admitirmos que $Ma = 1$, obtemos

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{p^*}{T^*} \right) \left(\frac{T_0}{p_0} \right) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \left(\frac{k+1}{2} \right) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (11.65)$$

Se $k=1,4$; temos

$$\left(\frac{\rho^*}{\rho_0} \right)_{k=1,4} = 0,634 \quad (11.66)$$

Note que o valor da massa específica do ar na garganta do bocal, quando o escoamento está bloqueado, é igual a 63,4% do valor da massa específica do ar estagnado.

Exemplo 11.5

Ar escoa em regime permanente no duto convergente montado a montante do tubo receptor mostrado na Fig. E11.5a. A área da seção transversal da garganta do duto convergente é $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Determine a vazão em massa no duto se a pressão no tubo receptor for igual a (a) 80 kPa (abs), (b) 40 kPa (abs). Construa os diagramas $T - s$ referentes a estas duas situações.

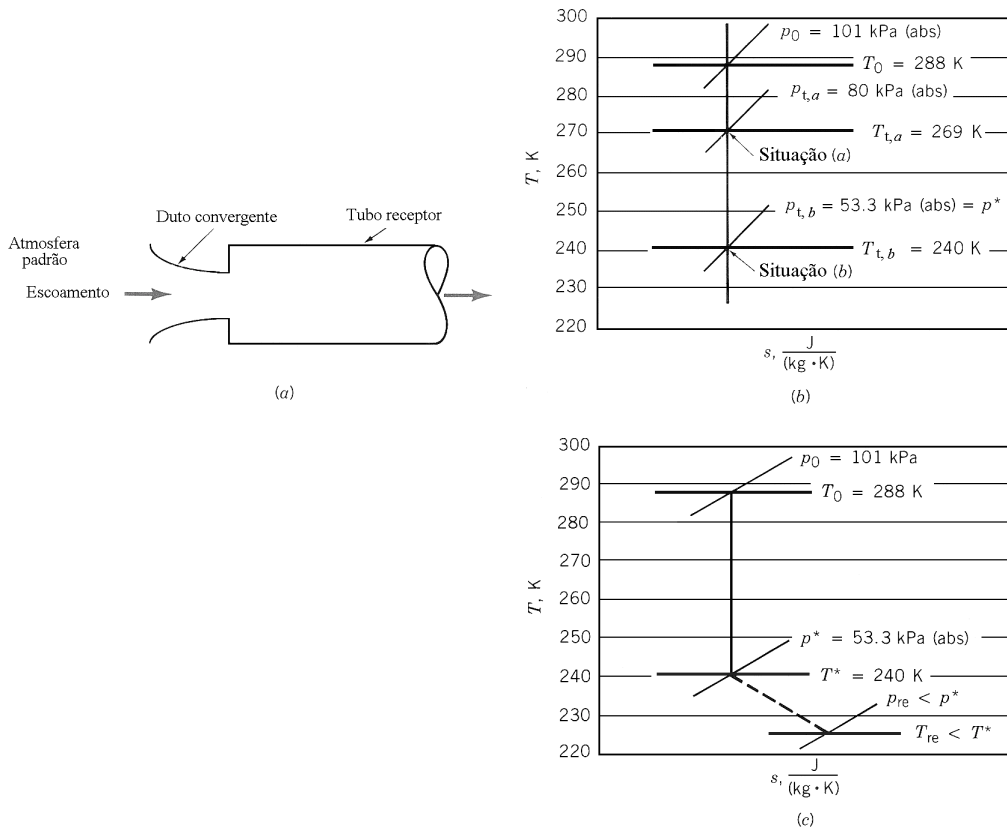


Figura E11.5

Solução Nós podemos utilizar a equação da continuidade (Eq. 11.40) para determinar a vazão em massa deste escoamento, ou seja,

$$\dot{m} = \rho AV = \text{constante}$$

Se nós analisarmos o escoamento na garganta do duto convergente, temos

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t \quad (1)$$

Nós vamos admitir que o escoamento no duto convergente é isoentrópico e que o ar se comporta como um gás perfeito com calores específicos constantes. Assim, a massa específica na garganta do bocal, ρ_t , pode ser calculada com a Eq. 11.60,

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = \left\{ \frac{1}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}_t^2} \right\}^{1/(k-1)} \quad (2)$$

Se admitirmos que a atmosfera é a padrão, a massa específica de estagnação, ρ_0 , é $1,23 \text{ kg/m}^3$ e a razão entre os calores específicos é igual a 1,4. Nós podemos utilizar a Eq. 11.59 para determinar o número de Mach na garganta do bocal, ou seja,

$$\frac{p_t}{p_0} = \left\{ \frac{1}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}_t^2} \right\}^{k/(k-1)} \quad (3)$$

A pressão crítica, p^* , pode ser determinada com a Eq. 11.62. Deste modo,

$$p^* = 0,528 p_0 = 0,528 p_{\text{atm}} = 0,528 \times 101 = 53,3 \text{ kPa(abs)}$$

Se a pressão no tubo receptor, p_{re} , é maior do que p^* , nós detectaremos $p_t = p_{\text{re}}$. Entretanto, se $p_{\text{re}} < p^*$, nós detectaremos $p_t = p^*$ e o escoamento estará bloqueado. O número de Mach na garganta, Ma_t , pode ser obtido com a Eq. (3) se conhecermos o valor de p_t , p_0 e k . Já o valor de ρ_t pode ser determinado com a Eq. (2). A velocidade do escoamento na garganta do duto convergente pode ser obtida com uma combinação das Eqs. 11.36 e 11.46. Assim,

$$V_t = \text{Ma}_t c_t = \text{Ma}_t \sqrt{RT_t k} \quad (4)$$

O valor da temperatura na garganta do duto, T_t , pode ser calculado com a Eq. 11.56,

$$\frac{T_t}{T_0} = \frac{1}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}_t^2} \quad (5)$$

A temperatura de estagnação do escoamento no duto convergente é constante porque este escoamento é isoentrópico. Assim, a temperatura nominal do ambiente, $T_0 = 288 \text{ K}$, é também a temperatura de estagnação do escoamento. Note que nós sempre utilizamos temperaturas e pressões absolutas no tratamento dos problemas de escoamentos compressíveis.

(a) Para $p_{\text{re}} = 80 \text{ kPa (abs)} > 53,3 \text{ kPa (abs)} = p^*$, nós temos $p_t = 80 \text{ kPa (abs)}$. Aplicando a Eq. 3,

$$\frac{80}{101} = \left\{ \frac{1}{1 + [(1,4-1)/2] \text{Ma}_t^2} \right\}^{1,4/(1,4-1)}$$

ou

$$\text{Ma}_t = 0,587$$

A Eq. (2) fornece

$$\frac{\rho_t}{1,23} = \left\{ \frac{1}{1 + [(1,4-1)/2] (0,587)^2} \right\}^{1/(1,4-1)}$$

ou

$$\rho_t = 1,04 \text{ kg/m}^3$$

A Eq. (5) fornece

$$\frac{T_t}{288} = \frac{1}{1 + [(1,4-1)/2] (0,587)^2}$$

ou

$$T_t = 269 \text{ K}$$

Aplicando os valores calculados de Ma_t e T_t na Eq. (4), temos

$$V_t = 0,587[(286,9) \times (269) \times (1,4)]^{1/2} = 193 \text{ m/s}$$

Finalmente, a vazão em massa no duto convergente pode ser calculada com a Eq. (1),

$$\dot{m} = (1,04)(1,0 \times 10^{-4})(193) = 0,0201 \text{ kg/s}$$

(b) Para $p_{re} = 40 \text{ kPa (abs)} < 53,3 \text{ kPa (abs)} = p^*$, nós temos $p_t = p^* = 53,3 \text{ kPa (abs)}$ e $Ma_t = 1$. Note que o escoamento no duto convergente está bloqueado. Aplicando a Eq. 2 (veja também a Eq. 11.66),

$$\frac{\rho_t}{1,23} = \left\{ \frac{1}{1 + [(1,4-1)/2](1)^2} \right\}^{1/(1,4-1)}$$

ou

$$\rho_t = 0,78 \text{ kg/m}^3$$

A Eq. (5) fornece (veja também a Eq. 11.64),

$$\frac{T_t}{288} = \frac{1}{1 + [(1,4-1)/2](1)^2}$$

ou

$$T_t = 240 \text{ K}$$

Aplicando o valor calculado de T_t na Eq. (4),

$$V_t = (1,0) [(286,9) \times (240) \times (1,4)]^{1/2} = 310 \text{ m/s}$$

Finalmente, a vazão em massa no duto convergente pode ser calculada com a Eq. (1),

$$\dot{m} = (0,78)(1,0 \times 10^{-4})(310) = 0,0242 \text{ kg/s}$$

Nos podemos construir os diagramas $T-s$ referentes aos dois escoamentos com os resultados obtidos ao longo do problema. A Fig. E11.5b mostra um esboço destes diagramas.

Note que o escoamento de ar da condição atmosférica até a pressão no tubo receptor, p_{re} , é isoentrópico se p_{re} é maior ou igual a pressão crítica, p^* . Quando a pressão no tubo receptor é menor do que a pressão crítica, como na situação (b), o que será que acontece com o escoamento a jusante da garganta do duto convergente? A experiência sugere que este escoamento é tridimensional, não isoentrópico, apresenta uma queda de pressão brusca de p_t para p_{re} e uma queda de temperatura. Estas características estão indicadas na Fig. E11.5c.

As Eqs. 11.56, 11.59 e 11.60 foram utilizadas para construir a Fig. 11.34. Note que os resultados apresentados nesta figura são válidos para fluidos que apresentam $k = 1,4$ (por exemplo, ar atmosférico). Os Exemplos 11.6 e 11.7 mostram como as curvas referentes a T/T_0 , p/p_0 e ρ/ρ_0 em função do número de Mach podem ser utilizadas na resolução de problemas onde os escoamentos são compressíveis.

Exemplo 11.6

Resolva o Exemplo 11.5 utilizando os valores apresentados na Fig. 11.34.

Solução Nós precisamos conhecer o valor da massa específica do ar e a velocidade do escoamento na garganta do duto convergente para calcular a vazão em massa no duto porque

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t \quad (1)$$

(a) Como a pressão no tubo receptor, $p_{re} = 80 \text{ kPa (abs)}$ é maior do que a pressão crítica, $p^* = 53,3 \text{ kPa (abs)}$, a pressão na garganta, p_t , é igual a pressão no tubo receptor. Assim,

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{80}{101} = 0,792$$

A Fig. 11.34 indica que, para esta relação de pressões,

$$\text{Ma}_t = 0,59$$

$$\frac{T_t}{T_0} = 0,94 \quad (2)$$

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = 0,85 \quad (3)$$

As Eqs. (2) e (3) indicam que

$$T_t = (0,94)(288) = 271 \text{ K} \quad \text{e} \quad \rho_t = (0,85)(1,23) = 1,04 \text{ kg/m}^3$$

A velocidade do escoamento na garganta do duto convergente pode ser calculada com as Eqs. 11.36 e 11.46. Deste modo,

$$V_t = \text{Ma}_t \sqrt{kRT_t} = (0,59)[(1,4)(286,9)(271)]^{1/2} = 195 \text{ m/s}$$

Utilizando a Eq. (1),

$$\dot{m} = (1,04)(1,0 \times 10^{-4})(195) = 0,0203 \text{ kg/s}$$

(b) Para $p_{re} = 40 \text{ kPa (abs)} < 53,3 \text{ kPa (abs)} = p^*$, a pressão na garganta do bocal é igual a $53,3 \text{ kPa (abs)}$ e o escoamento no duto está bloqueado ($\text{Ma}_t = 1$). Utilizando a Fig. 11.34 com $\text{Ma} = 1$,

$$\frac{T_t}{T_0} = 0,83 \quad (4)$$

e

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = 0,64 \quad (5)$$

As Eqs. (4) e (5) indicam que

$$T_t = (0,83)(288) = 239 \text{ K} \quad \text{e} \quad \rho_t = (0,64)(1,23) = 0,79 \text{ kg/m}^3$$

A velocidade do escoamento na garganta do duto convergente pode ser calculada com as Eqs. 11.36 e 11.46. Deste modo,

$$V_t = \text{Ma}_t \sqrt{kRT_t} = (1)[(1,4)(286,9)(239)]^{1/2} = 310 \text{ m/s}$$

Utilizando a Eq. (1),

$$\dot{m} = (0,79)(1,0 \times 10^{-4})(310) = 0,024 \text{ kg/s}$$

Observe que os resultados obtidos neste exemplo são essencialmente os mesmos daqueles obtidos no exemplo anterior. Os diagramas $T-s$ destes escoamentos podem ser vistos na Fig. E11.5.

Exemplo 11.7

A razão entre a pressão estática e a de estagnação num ponto de um escoamento, medida com um tubo de Pitot (veja a Fig. 3.6), é 0,82. A temperatura de estagnação do escoamento é $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Determine a velocidade neste ponto do escoamento se o fluido que escoia é (a) ar e (b) hélio.

Solução Nós vamos admitir que os dois fluidos se comportam como gases perfeitos com calores específicos constantes. Deste modo, nós podemos utilizar qualquer equação apresentada nesta seção. Nós vamos utilizar as Eqs. 11.36 e 11.46 para determinar a velocidade do escoamento, ou seja,

$$V = \text{Ma} \sqrt{kRT} \quad (1)$$

Nós podemos obter o número de Mach com a Eq. 11.59 (ou com a Fig. 11.34 no caso onde o fluido que escoar é ar) se conhecermos o valor da razão entre a pressão estática e a de estagnação, p/p_0 , e a razão entre os calores específicos. A Fig. 11.34 não pode ser utilizada no caso (b) porque a razão entre os calores específicos do hélio, k , é diferente de 1,4. Agora, nós podemos calcular a temperatura de estática com a Eq. 11.56 (ou com a Fig. 11.34 no caso onde o fluido que escoar é ar) se conhecermos o número de Mach, a razão entre os calores específicos e a temperatura de estagnação.

(a) Para o escoamento de ar, $p/p_0 = 0,82$ e a Fig. 11.34 indica

$$\text{Ma} = 0,54 \quad (2)$$

e

$$\frac{T}{T_0} = 0,94 \quad (3)$$

Utilizando a Eq. (3), temos

$$T = (0,94)(20 + 273) = 275 \text{ K} \quad (4)$$

Combinando as Eqs. (1), (2) e (4),

$$V = (0,54) [(1,4)(286,9)(275)]^{1/2} = 180 \text{ m/s}$$

(b) Para o escoamento de hélio, $p/p_0 = 0,82$ e $k = 1,66$. Substituindo estes valores na Eq. 11.59,

$$0,82 = \left\{ \frac{1}{1 + [(1,66 - 1)/2] \text{Ma}^2} \right\}^{1,66/(1,66-1)}$$

ou

$$\text{Ma} = 0,499$$

Aplicando este resultado na Eq. 11.56,

$$T = \left\{ \frac{1}{1 + [(1,66 - 1)/2] (0,499)^2} \right\} (20 + 273) = 271 \text{ K}$$

Utilizando a Eq. (1), obtemos

$$V = (0,499) [(2077)(271)(1,66)]^{1/2} = 482 \text{ m/s}$$

Note que nós utilizamos as equações derivadas para escoamentos unidimensionais e isoentrópicos em dutos para analisar o escoamento de uma partícula ao longo da trajetória referente ao processo de estagnação. Esta aplicação é correta se o movimento da partícula puder ser modelado como adiabático e sem atrito (lembre que nós modelamos o processo de estagnação deste modo). Observe, também, que os números de Mach dos casos (a) e (b) são próximos mas as velocidades dos escoamentos são muito diferentes. A velocidade do escoamento de hélio é bem maior do que a velocidade do escoamento de ar porque a velocidade do som no hélio é muito maior do que a velocidade do som no ar.

A Fig. 11.34 também apresenta valores para a razão entre a área local, A , e a área crítica, A^* , em função do número de Mach. Nós vamos mostrar, a seguir, a importância desta relação nos escoamentos compressíveis.

A equação da conservação da massa (Eq. 11.40) nos escoamentos bloqueados em dutos convergentes – divergentes (veja a Fig. 11.6a) indica que

$$\rho AV = \rho^* A^* V^*$$

ou

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right) \left(\frac{V^*}{V} \right) \quad (11.67)$$

A combinação da Eq. 11.36 com a Eq. 11.46 fornece

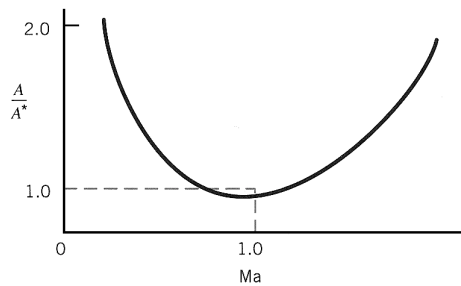


Figura 11.10 Variação da razão entre áreas em função do número de Mach para um escoamento de gás perfeito com $k = 1,4$.

$$V^* = (kRT^*)^{1/2} \quad (11.68)$$

e

$$V = Ma (kRT)^{1/2} \quad (11.69)$$

Combinando as Eqs. 11.67, 11.68 e 11.69, temos

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left(\frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \left[\frac{(T^*/T_0)}{(T/T_0)} \right]^{1/2} \quad (11.70)$$

Incorporando as Eqs. 11.56, 11.60, 11.63, 11.65 na Eq. 11.70, obtemos

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left\{ \frac{1 + [(k-1)/2] Ma^2}{1 + [(k-1)/2]} \right\}^{(k+1)/[2(k-1)]} \quad (11.71)$$

A Eq. 11.71 foi utilizada para gerar os valores de A/A^* mostrados na Fig. 11.34 (para o escoamento de ar – $k = 1,4$). A Fig. 11.10 mostra um gráfico de A/A^* em função do número de Mach. Como será mostrado nos próximos exemplos, esta relação entre áreas, mesmo que a área A^* não esteja fisicamente presente, é bastante útil na análise dos escoamentos isoentrópicos de gases perfeitos num duto convergente – divergente.

Exemplo 11.8

Um duto convergente – divergente é alimentado com ar proveniente da atmosfera. A velocidade do ar na seção de alimentação do duto é subsônica e o escoamento no duto é isoentrópico e bloqueado. O duto convergente – divergente é axissimétrico e a área da seção transversal do duto, A , é dada por

$$A = 0,1 + x^2$$

onde x é a distância axial medida em relação a garganta do bocal. A seção de alimentação do duto está localizada em $x = -0,5$ m e a de descarga em $x = +0,5$ m. Faça um esboço do corte lateral deste duto e um gráfico que mostre a variação do número de Mach deste escoamento. Construa, também, um gráfico que mostre a variação da razão entre a temperatura estática e a de estagnação, T/T_0 , referente a este escoamento. Superponha, neste gráfico, a curva que mostra a variação da razão entre a pressão estática e a de estagnação, p/p_0 encontrada neste escoamento. Mostre, utilizando o diagrama $T - s$, quais são os possíveis estados do fluido em $x = -0,5$ m, 0 m e $+0,5$ m.

Solução As seções transversais deste duto são circulares porque o duto é axissimétrico. As áreas das seções transversais do duto são dadas por

$$A = \pi r^2 \quad (1)$$

Como,

$$A = 0,1 + x^2 \quad (2)$$

temos

$$r = \left(\frac{0,1 + x^2}{\pi} \right)^{1/2} \quad (3)$$

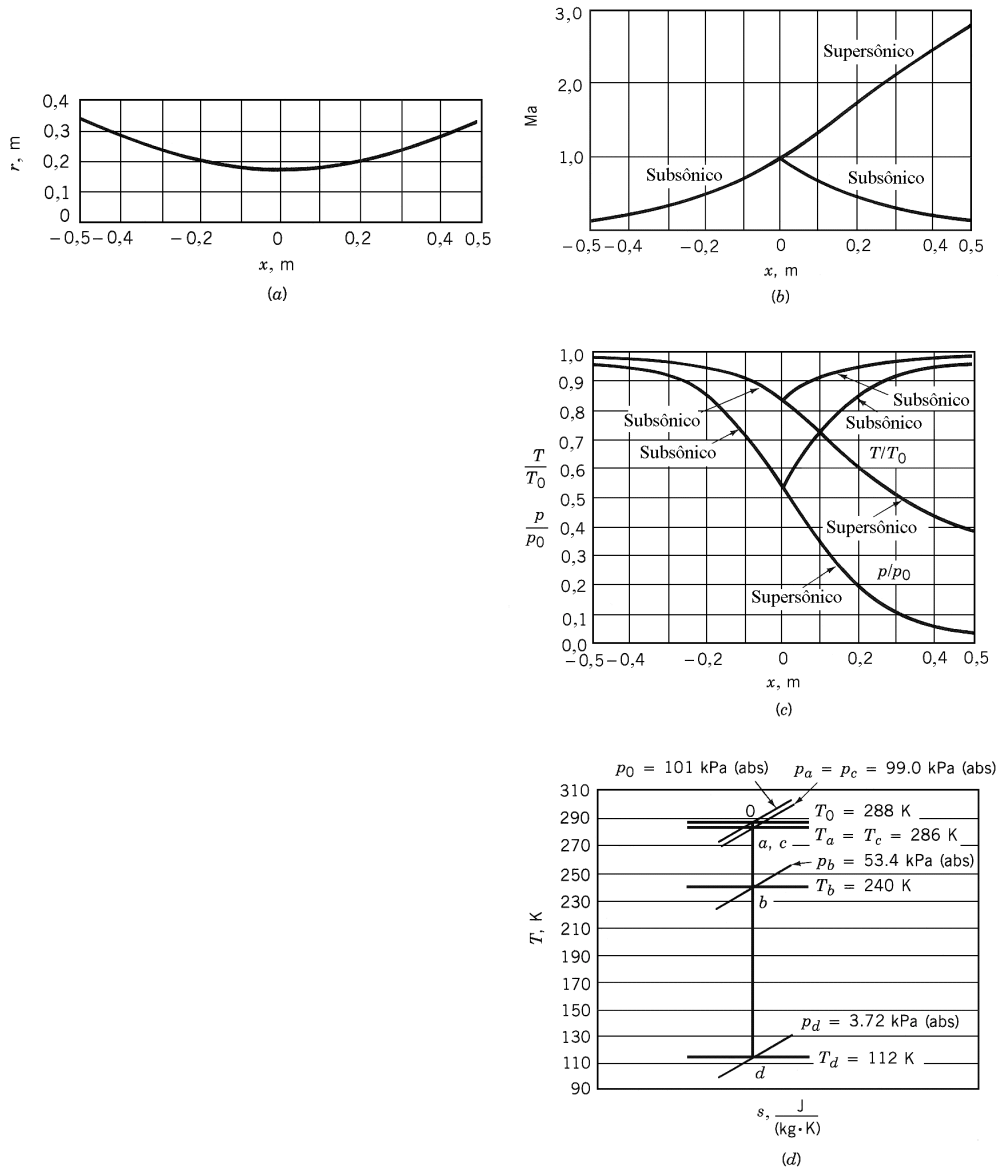


Figura E11.8

O gráfico desta função, que define o contorno do duto convergente – divergente, está mostrado na Fig. E11.8a.

O escoamento no duto convergente – divergente está bloqueado. Assim, a área da garganta é igual a área crítica, A^* . Deste modo, a Eq. 2 indica que

$$A^* = 0,1 \text{ m}^2 \tag{4}$$

Combinando as Eqs. (2) e (4),

$$\frac{A}{A^*} = \frac{0,1 + x^2}{0,1} \tag{5}$$

A distribuição do número de Mach deste escoamento pode ser obtida a partir dos valores de A/A^* fornecidos pela Eq. (5) e da Eq. 11.71. Note que nós também podemos determinar esta distribuição utilizando a Fig. 11.34. As distribuições das razões T/T_0 e p/p_0 podem ser calculadas com as Eqs.

11.56 e 11.59 se conhecermos como o número de Mach varia ao longo do duto convergente – divergente. Novamente, nós podemos determinar estas variações utilizando a Fig. 11.34. Nós vamos resolver este problema utilizando os valores apresentados nesta figura. A próxima tabela foi construída com as Eqs. (3) e (5) e os valores indicados na Fig. 11.34.

Observe que o escoamento na região convergente do duto é único quando o ar entra no duto com velocidade subsônica. Nesta condição, o escoamento na região convergente do duto é acelerado até que se torne sônico ($Ma = 1$) na garganta do duto. Existem duas soluções isoentrópicas para o escoamento na região divergente do duto: uma subsônica e outra supersônica.

Fig. 11.34

x (m)	r (m), da Eq. 3	A/A^* , da Eq. 5	Ma	T/T_0	p/p_0	Estado
Solução Subsônica						
-0,5	0,334	3,5	0,17	0,99	0,98	<i>a</i>
-0,4	0,288	2,6	0,23	0,99	0,97	
-0,3	0,246	1,9	0,32	0,98	0,93	
-0,2	0,211	1,4	0,47	0,96	0,86	
-0,1	0,187	1,1	0,69	0,91	0,73	
0	0,178	1	1,00	0,83	0,53	<i>b</i>
+0,1	0,187	1,1	0,69	0,91	0,73	
+0,2	0,211	1,4	0,47	0,96	0,86	
+0,3	0,246	1,9	0,32	0,98	0,93	
+0,4	0,288	2,6	0,23	0,99	0,97	
+0,5	0,344	3,5	0,17	0,99	0,98	<i>c</i>
Solução Supersônica						
+0,1	0,187	1,1	1,37	0,73	0,33	
+0,2	0,211	1,4	1,76	0,62	0,18	
+0,3	0,246	1,9	2,14	0,52	0,10	
+0,4	0,288	2,6	2,48	0,45	0,06	
+0,5	0,334	3,5	2,80	0,39	0,04	<i>d</i>

Se a relação de pressão p/p_0 for igual a 0,98 em $x = +0,5$ m, o escoamento na descarga do duto será subsônico. Agora, se a relação de pressão p/p_0 for igual a 0,04 em $x = +0,5$ m, o escoamento na descarga do duto será supersônico. A Fig. E11.8 mostra o comportamento destas duas soluções. Nós analisaremos novamente os escoamentos sem choque em dutos convergente - divergente no Exemplo 11.10.

Exemplo 11.9

O duto convergente – divergente do Exemplo 11.8 é alimentado com ar proveniente da atmosfera. A velocidade do ar na seção de alimentação do duto é supersônica e o escoamento no duto é isoentrópico e bloqueado. Construa um gráfico da variação do número de Mach deste escoamento. Construa, também, um gráfico que mostre a variação da razão entre a temperatura estática e a de estagnação, T/T_0 , referente a este escoamento. Superponha, neste gráfico, a curva que mostra a variação da razão entre a pressão estática e a de estagnação, p/p_0 encontrada neste escoamento. Mostre, utilizando o diagrama $T - s$, quais são os possíveis estados do fluido em $x = -0,5$ m, 0 m e $+0,5$ m.

Da Fig. 11.34

x (m)	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	Estado
-0,5	3,5	2,8	0,39	0,04	<i>e</i>
-0,4	2,6	2,5	0,45	0,06	
-0,3	1,9	2,1	0,52	0,10	
-0,2	1,4	1,8	0,62	0,18	
-0,1	1,1	1,4	0,73	0,33	
0	1	1,0	0,83	0,53	<i>b</i>

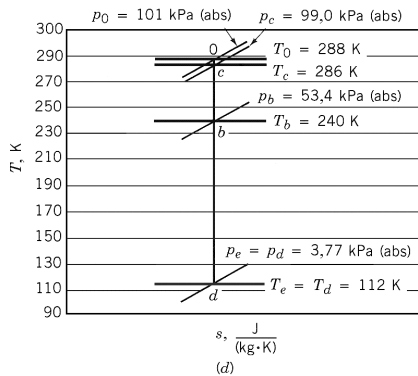
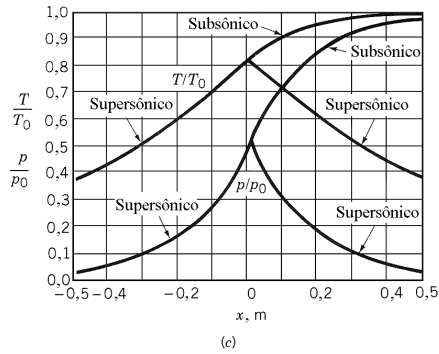
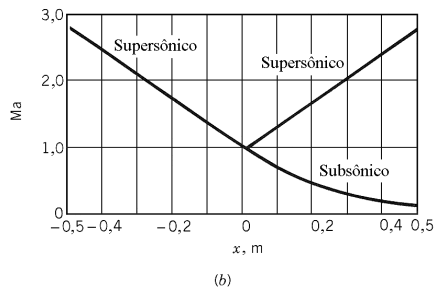
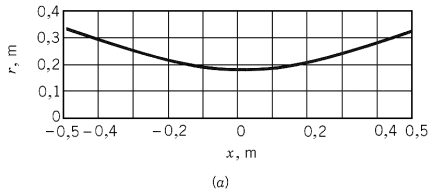


Figura E11.9

Solução Só existe uma solução isoentrópica para o escoamento na região convergente do duto quando a velocidade do escoamento na seção de entrada do duto é supersônica. Note que, nas condições do problema, o escoamento deve desacelerar até a velocidade do som na garganta do duto e que as duas soluções isoentrópicas do escoamento na região divergente do duto continuam válidas. Nós podemos utilizar os valores obtidos para o escoamento supersônico que constam na tabela do Exemplo 11.8 porque o duto convergente – divergente é simétrico em relação ao plano da garganta. A tabela anterior apresenta a solução do escoamento supersônico na região convergente do duto e a Fig. E11.9 mostra os gráficos pedidos na formulação do problema.

Exemplo 11.10

Ar escoou isentropicamente e de modo subsônico no duto convergente – divergente do Exemplo 11.8. Desenhe o gráfico da variação do número de Mach do escoamento sabendo que $Ma = 0,48$ em $x = 0$. Construa, também, um gráfico que mostre a variação da razão entre a temperatura estática e a de estagnação, T/T_0 , referente a este escoamento. Superponha, neste gráfico, a curva que mostra a variação da razão entre a pressão estática e a de estagnação, p/p_0 encontrada neste escoamento. Construa o diagrama $T - s$ deste escoamento.

Solução O escoamento no duto convergente – divergente será subsônico porque $Ma = 0,48$ em $x = 0$. A Fig. 11.34 indica que $T/T_0 = 0,96$, $A/A^* = 1,4$ e $p/p_0 = 0,85$ quando $Ma = 0,48$. Mesmo que a seção com área crítica não exista, a área A^* continua sendo um referência básica para o escoamento. Lembre que p_0 , T_0 e A^* são constantes num dado escoamento isoentrópico. Como a área da seção transversal em $x = 0$ m é igual a $0,10$ m² (veja a Eq. 2 do Exemplo 11.8), a área crítica, A^* , deste exemplo é

$$A^* = \frac{A}{(A/A^*)} = \frac{0,10}{1,4} = 0,07 \text{ m}^2 \quad (1)$$

Conhecendo o valor de A^* é possível calcular A/A^* em qualquer seção do duto convergente – divergente e através da Fig. 11.34 determinar os valores de Ma , T/T_0 e p/p_0 . A próxima tabela apresenta um conjunto de valores determinados deste modo e a Fig. E11.10 mostra os gráficos pedidos na formulação do problema.

Da Fig. 11.34

x (m)	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	Estado
-0,5	5,0	0,12	0,99	0,99	<i>a</i>
-0,4	3,7	0,16	0,99	0,98	
-0,3	2,7	0,23	0,99	0,96	
-0,2	2,0	0,31	0,98	0,94	
-0,1	1,6	0,40	0,97	0,89	
0	1,4	0,48	0,96	0,85	<i>b</i>
+0,1	1,6	0,40	0,97	0,89	
+0,2	2,0	0,31	0,98	0,94	
+0,3	2,7	0,23	0,99	0,96	
+0,4	3,7	0,16	0,99	0,98	
+0,5	5,0	0,12	0,99	0,99	<i>c</i>

Um procedimento mais preciso para resolver este problema é o baseado nas equações que descrevem os escoamentos isoentrópicos apresentadas neste capítulo. Este procedimento é constituído pelos seguintes passos:

1. Utilize a Eq. 11.59, os valores de k e Ma para obter p/p_0 em $x = 0$.
2. Determine A/A^* em $x = 0$ com a Eq. 11.71 e os valores de k e Ma .
3. Determine A^* a partir dos valores de A e A/A^* em $x = 0$.
4. Determine o valor de A/A^* em várias posições axiais diferentes.

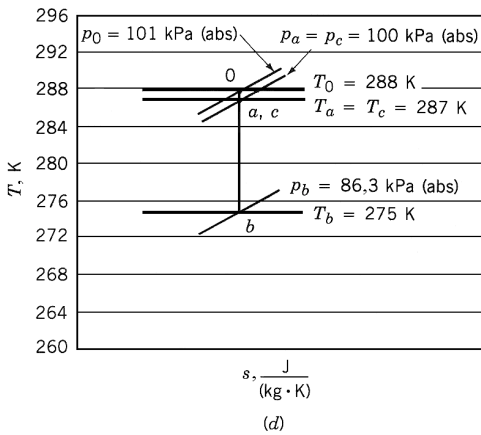
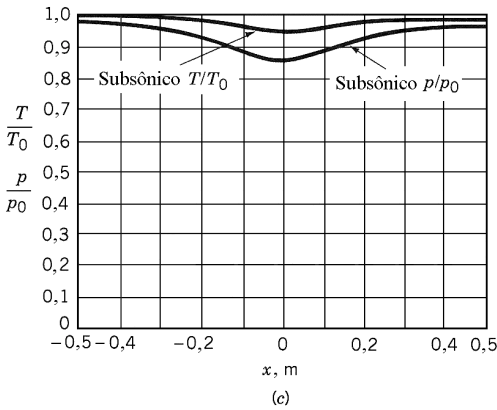
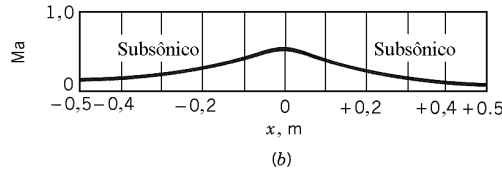
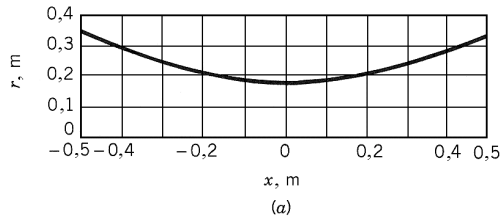


Figura E11.10

5. Utilize a Eq. 11.71 e os valores de A/A^* do passo 4 para obter os números de Mach ao longo do duto.
6. Utilize a Eq. 11.56 e 11.59 e o número de Mach do passo 5 para obter T/T_0 e p/p_0 ao longo do duto.

Existem infinitos escoamentos isentrópicos subsônicos no duto convergente – divergente considerado neste exemplo.

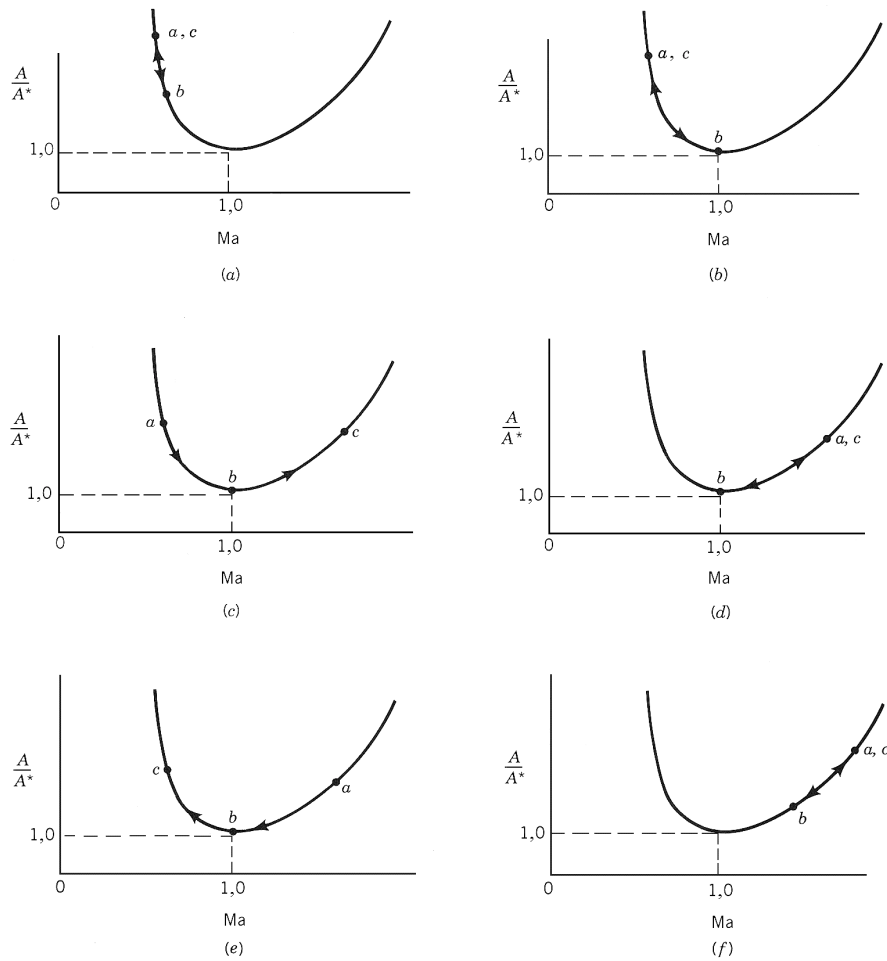


Figura 11.11 Escoamentos isentrópicos num duto convergente – divergente: (a) subsônico a subsônico (operação não bloqueada), (b) subsônico a subsônico (operação bloqueada). (c) subsônico a supersônico (operação bloqueada), (d) supersônico a supersônico (operação bloqueada), (e) supersônico a subsônico (operação bloqueada) e (f) supersônico a supersônico (operação não bloqueada).

Os comportamentos dos escoamentos isentrópicos no duto convergente – divergente discutidos nos Exemplos 11.8, 11.9 e 11.10 está resumido nos gráficos da relação de área, A/A^* , em função do número de Mach mostrados na Fig. 11.11. Os pontos a , b e c representam os estados nas seções que apresentam $x = -0,5$ m, 0 m e $+0,5$ m. O escoamento isentrópico representado na Fig. 11.11a é subsônico e não está bloqueado. Esta situação foi discutida no Exemplo 11.10. A Fig. 11.11b representa o escoamento bloqueado com velocidade subsônica nas seções de alimentação e descarga do duto e a Fig. 11.11c representa o escoamento bloqueado com velocidade subsônica na seção de alimentação e velocidade supersônica na seção de descarga (os dois casos foram considerados no Exemplo 11.8). Os estados representados na Fig. 11.11d estão relacionados com o escoamento bloqueado supersônico a supersônico analisado no Exemplo 11.9 e os estados representados na Fig. 11.11e representam o escoamento supersônico a subsônico bloqueado também descrito no Exemplo 11.9. A situação representada pela Fig. 11.11f não foi analisada nos exemplos anteriores. Este caso é referente ao escoamento não bloqueado onde as velocidades nas seções de alimentação e descarga são supersônicas. Estas seis figuras representam todos os tipos de escoamentos isentrópicos que podem ser encontrados em dutos convergente - divergente.

Considere um duto convergente – divergente e um gás perfeito que apresenta k constante e um dado estado de estagnação (i.e., T_0 e p_0 fixos). Nestas condições, o número de escoamentos

isentrópicos não bloqueados que partem de uma condição subsônica e são descarregados do duto de modo subsônico é infinito. De outro lado, os escoamentos bloqueados que partem de uma condição subsônica e são descarregados de modo supersônico ou subsônico e os escoamentos bloqueados que partem de uma condição supersônica e são descarregados de modo supersônico ou subsônico são únicos. A Fig. 11.12 mostra os gráficos destes escoamentos. Note que é possível obter um escoamento isentrópico no duto se a pressão na seção de descarga do duto é igual ou maior do que o valor de p_I indicado na Fig. 11.12d. O escoamento isentrópico no duto também é possível quando a pressão na seção de descarga do duto for igual ou menor do que p_{II} . Adicionalmente, o escoamento isentrópico no duto não é possível quando a pressão na seção de descarga do duto for menor do que p_I e maior do que o valor de p_{III} indicado na Fig. 11.13. A determinação do valor de p_{III} será realizada no Exemplo 11.19 (☉ 11.3 – Partida do motor de um foguete).

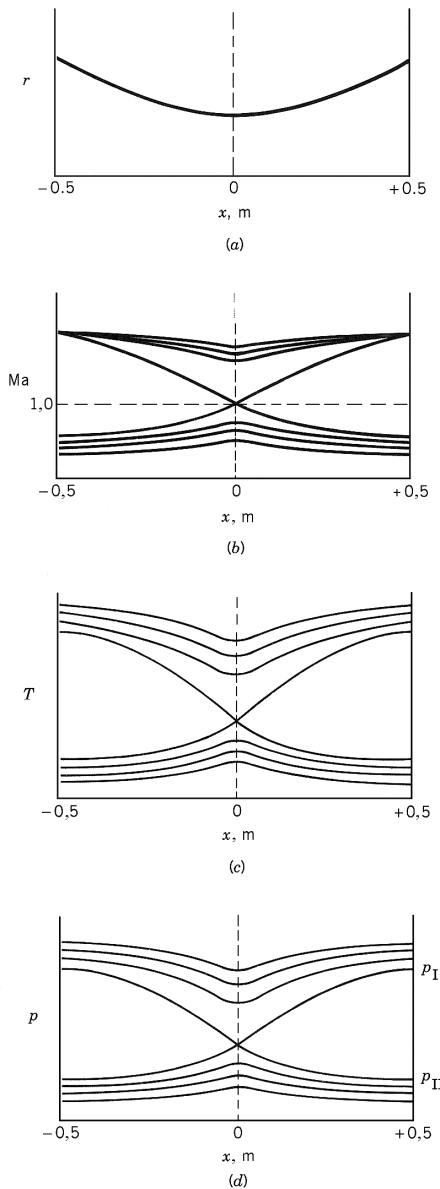


Figura 11.12 (a) Variação do raio do duto em função da posição axial, (b) Variação do número de Mach ao longo do duto, (c) Variação da temperatura ao longo do duto e (d) variação de pressão ao longo do duto.

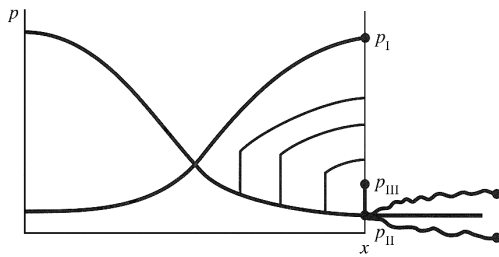


Figura 11.13 Formação de choque no escoamento num duto convergente – divergente.

A Fig. 11.13 mostra alguns escoamentos não isentrópicos possíveis em dutos convergente – divergente. Os aumentos bruscos de pressão indicados na figura ocorrem numa região tão fina que podem ser analisados como uma descontinuidade matemática. Estas descontinuidades são denominadas ondas de choque normais. Note que o escoamento na onda de choque não é isentrópico e que o escoamento no resto do duto pode ser isentrópico. As equações que descrevem as variações das propriedades do fluido que ocorrem através da onda de choque normal serão desenvolvidas na Sec. 11.5.3. O aumento, ou diminuição, menos brusca da pressão que ocorre logo após a descarga do escoamento do bocal também não é um processo isentrópico e é atribuído a uma onda de choque oblíqua. Se a pressão aumenta a jusante da seção de descarga do bocal, o escoamento é considerado "super expandido". De outro lado, o escoamento é "sub expandido" se a pressão do escoamento cai a jusante da seção de descarga do bocal (☉ 11.4 – Escoamento supersônico num bocal). Os leitores interessados no comportamento das ondas de choque oblíquas devem consultar a literatura sobre dinâmica dos gases (por exemplo, as Refs. [5, 6, 7 e 8]).

11.4.3 Escoamentos em Dutos com Seção Transversal Constante

A Eq. 11.50 indica que $dV = 0$ no escoamento em regime permanente e isentrópico de um gás perfeito num duto que apresenta seção transversal constante (veja a Fig. 11.14). Como a velocidade deste escoamento é constante, a equação da energia (Eq. 5.69) mostra que a entalpia específica e a temperatura também são constantes. Com esta informação e as Eqs. 11.36 e 11.46, nós concluímos que o número de Mach deste escoamento é constante. Utilizando as Eqs. 11.59 e 11.60, nós também concluímos que a pressão e a massa específica do fluido também são constantes. Assim, nós concluímos que o escoamento unidimensional e isentrópico de um gás perfeito não apresenta variações de velocidade e de propriedades do fluido a menos que ocorra variação da área da seção transversal do duto.

11.5 Escoamentos Não Isoentrópicos de um Gás Perfeito

Nós analisaremos nesta seção os escoamentos unidimensionais, em regime permanente e não isentrópicos de um gás ideal num duto com seção transversal constante e também consideraremos as ondas de choque normais.

11.5.1 Escoamento Adiabático e com Atrito em Dutos com Seção Transversal Constante (Escoamento de Fanno)

Considere o escoamento de um gás perfeito, unidimensional, adiabático e que ocorre em regime permanente num duto com seção transversal constante mostrado nas Figs. 11.14. Este escoamento é conhecido como o de Fanno. A aplicação da equação da energia (Eq. 5.69) ao volume de controle indicado na Fig. 11.15 resulta em

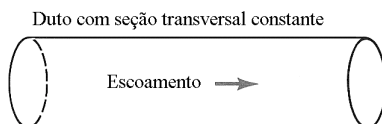


Figura 11.14 Escoamento num duto com seção transversal constante.

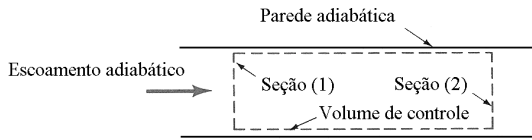


Figura 11.15 Escoamento adiabático num duto com seção transversal constante.

$$\tilde{h} + \frac{V^2}{2} = \tilde{h}_0 = \text{constante} \tag{11.72}$$

onde \tilde{h}_0 é a entalpia específica de estagnação. Como o gás que escoar no duto é perfeito, a Eq. 11.9 indica que

$$\tilde{h} - \tilde{h}_0 = c_p (T - T_0) \tag{11.73}$$

Combinando as Eqs. 11.17 e 11.73, temos

$$T + \frac{V^2}{2c_p} = T_0 = \text{constante}$$

ou

$$T + \frac{(\rho V)^2}{2c_p \rho^2} = T_0 = \text{constante} \tag{11.74}$$

Utilizando a equação de estado dos gases perfeitos (Eq. 11.1),

$$T + \frac{(\rho V)^2 T^2}{2c_p (\rho^2 / R^2)} = T_0 = \text{constante} \tag{11.75}$$

A equação da continuidade (Eq. 11.40) nos mostra que o produto ρV é constante no escoamento de Fanno porque a área da seção transversal do duto é constante e a equação da energia mostra que a temperatura de estagnação no escoamento de Fanno também é constante. Assim, a Eq. 11.75 nos permite calcular a distribuição de temperatura no escoamento se conhecermos a distribuição de pressão no escoamento.

Sempre é interessante analisar um processo com o diagrama $T - s$. A Eq. 11.22 nos permite determinar a distribuição de entropia específica no escoamento de Fanno se nós considerarmos que a temperatura, T_1 , pressão, p_1 , e entropia específica, s_1 , na seção de alimentação do duto são valores de referência. Assim,

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} \tag{11.76}$$

A Fig. 11.16 mostra o diagrama $T - s$ do escoamento de Fanno que pode ser construído com as Eqs. 11.75 e 11.76. Esta curva é relativa a um dado gás (c_p e R) e uma certa condição operacional definida pelos valores da temperatura de estagnação, vazão em massa do escoamento por unidade de área (ρV) e temperatura, pressão e entropia específica na seção de alimentação do duto. A curva formada pelos estados percorridos pelo fluido é denominada linha de Fanno.

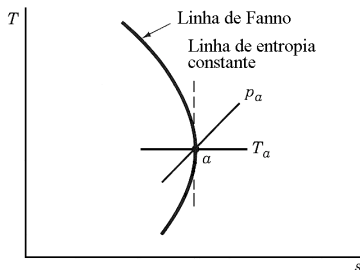


Figura 11.16 Diagrama $T - s$ do escoamento de Fanno.

Exemplo 11.11

Ar ($k = 1,4$) escoia num tubo isolado e as propriedades do fluido na seção de alimentação do tubo são

$$\begin{aligned} T_0 &= 288,2 \text{ K} \\ T_1 &= 285,9 \text{ K} \\ p_1 &= 98,6 \text{ kPa (abs)} \end{aligned}$$

Admitindo que o escoamento pode ser modelado como um de Fanno, determine a temperatura e a variação de entropia específica em várias seções do escoamento e construa a linha de Fanno referente a este escoamento.

Solução Nós podemos utilizar as Eqs. 11.75 e 11.76 para construir a linha de Fanno, ou seja,

$$T + \frac{(\rho V)^2 T^2}{2c_p (p^2 / R^2)} = T_0 = \text{constante} \quad (1)$$

e

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} \quad (2)$$

Nós precisamos conhecer os valores da constante de gás perfeito e do calor específico a pressão constante do ar. A Tab. 1.6 fornece o valor de R do ar, ou seja,

$$R = 286,9 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

O calor específico a pressão constante pode ser determinado com a Eq. 11.14,

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = \frac{(286,9)(1,4)}{(1,4-1)} = 1004,2 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \quad (3)$$

Combinando as Eqs. 11.1 e 11.69 nós obtemos

$$\rho V = \frac{p}{RT} \text{Ma} (kRT)^{1/2}$$

Neste escoamento, o valor de ρV é constante. Assim,

$$\rho V = \rho_1 V_1 = \frac{p_1}{RT_1} \text{Ma}_1 (kRT_1)^{1/2} \quad (4)$$

O valor do número de Mach na seção de alimentação do duto pode ser determinado com a razão entre as temperaturas T_1/T_0 e a Eq. 11.56. Deste modo,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{285,9}{288,2} = 0,992 \quad \text{e} \quad \text{Ma}_1 = 0,2$$

Utilizando a Eq. (4), temos

$$\rho V = \frac{(98,6 \times 10^3)(0,2)[(1,4)(286,9)(285,9)]^{1/2}}{(286,9)(285,9)} = 81,47 \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)}$$

Se nós admitirmos que $p = 48,3 \text{ kPa (abs)}$, a Eq. (1) fornece

$$T + \frac{(81,47)^2 T^2}{2(1004,2)(48,3 \times 10^3)^2 / (286,9)^2} = 288,2$$

ou

$$1,17 \times 10^{-4} T^2 + T - 288,2 = 0$$

Assim, a temperatura na seção do escoamento que apresenta $p = 48,3 \text{ kPa (abs)}$ é

$$T = 279,1 \text{ K}$$

Utilizando a Eq. (2), temos

$$s - s_1 = (1004,2) \ln \frac{279,1}{285,9} - (286,9) \ln \frac{48,3}{98,6} = 180,6 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

A próxima tabela pode ser construída repetindo o processo de cálculo de T e da variação de entropia específica em função de uma pressão admitida. Note que a Fig. E11.11 foi desenhada com os valores apresentados na tabela. Observe que a máxima diferença de entropia ocorre quando a pressão na seção é igual a 18,07 kPa (abs). O valor da temperatura nesta seção é 240,0 K.

p (kPa (abs))	T (K)	$s - s_1$ (J/(kg · K))
48,3	279,1	180,6
41,4	276,0	213,9
34,5	271,3	248,8
27,6	263,3	282,9
20,7	248,7	308,1
18,07	240,0	311,2
13,8	219,3	297,9
12,4	210,0	285,0
10,3	193,1	252,7
9,7	186,4	237,4

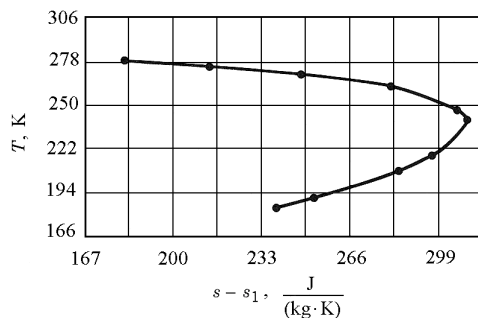


Figura E11.11

Nós podemos aprender mais sobre as linhas de Fanno se analisarmos melhor as equações que descrevem o escoamento de Fanno. Por exemplo, a segunda equação de Tds (Eq. 11.18) é

$$T ds = d\tilde{h} - \frac{dp}{\rho} \quad (11.18)$$

Para um gás perfeito,

$$d\tilde{h} = c_p dT \quad (11.7)$$

e

$$p = \rho RT \quad (11.1)$$

ou

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (11.77)$$

Combinando as quatro últimas equações, obtemos

$$T ds = c_p dT - RT \left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \right) \quad (11.78)$$

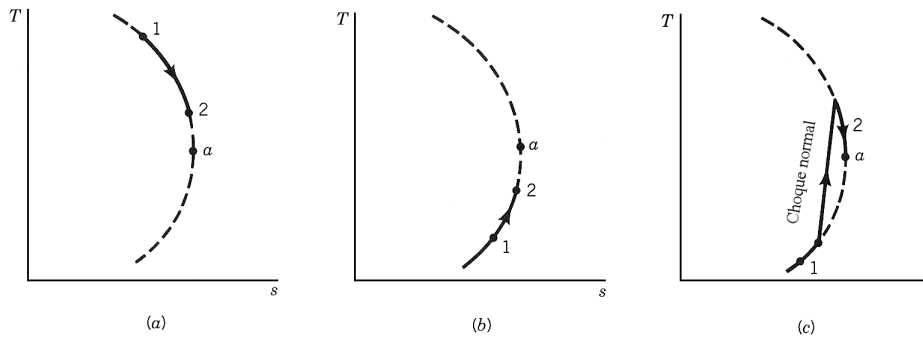


Figura 11.17 (a) Escoamento de Fanno subsônico, (b) Escoamento de Fanno supersônico e (c) Choque normal no escoamento de Fanno.

A equação da continuidade, para o escoamento de Fanno, fornece

$$\rho V = \text{constante}$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \tag{11.79}$$

Aplicando a Eq. 11.79 na 11.78,

$$T ds = c_p dT - RT \left(-\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} \right)$$

ou

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} - R \left(-\frac{1}{V} \frac{dV}{dT} + \frac{1}{T} \right) \tag{11.80}$$

Se diferenciarmos a equação da energia (Eq. 11.74), obtemos

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{c_p}{V} \tag{11.81}$$

Combinando as duas últimas equações,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} - R \left(\frac{c_p}{V^2} + \frac{1}{T} \right) \tag{11.82}$$

A linha de Fanno da Fig. 11.16 passa por um estado (indicado por *a*) onde $ds/dT = 0$. Neste estado, as equações 11.14 e 11.82 indicam que

$$V_a = (kRT_a)^{1/2} \tag{11.83}$$

Entretanto, se comparamos as Eqs. 11.83 e 11.36 nós encontramos que o número de Mach no estado *a* é igual a 1. Como a temperatura de estagnação é constante neste escoamento (veja a Eq. 11.74), a temperatura no ponto *a* é igual a temperatura crítica, T^* . Assim, um escoamento de Fanno cujos estados estão na parte superior da linha de Fanno (acima da temperatura crítica) é subsônico e o escoamento de Fanno na linha abaixo de T^* é supersônico.

A segunda lei da termodinâmica estabelece que a entropia pode permanecer constante ou aumentar num escoamento. Deste modo, o escoamento de Fanno deve acontecer ao longo da linha de Fanno e em direção do ponto *a* (o estado crítico) para que ele seja consistente com a segunda lei da termodinâmica. O estado crítico pode ou não ser alcançado pelo escoamento. Se isto acontecer o escoamento é denominado bloqueado. A Fig. 11.17 mostra alguns exemplos do comportamento dos escoamentos de Fanno. A Fig. 11.17a ilustra o caso onde um escoamento de Fanno subsônico e não

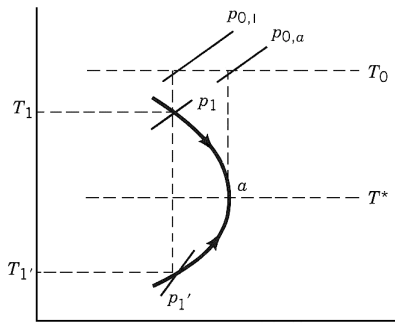


Figura 11.18 Escoamento de Fanno.

blocado é acelerado pelo atrito. O escoamento supersônico que é desacelerado pelo atrito e sem a ocorrência de bloqueio está mostrado na Fig. 11.17b. A Fig. 11.17c mostra uma alteração brusca de escoamento supersônico para subsônico no escoamento de Fanno. Esta desaceleração brusca ocorre através de uma onda de choque normal e estacionária. Este tipo de onda de choque será discutido mais detalhadamente na Sec. 11.5.3.

A Tab. 11.1 apresenta um resumo dos aspectos qualitativos dos escoamentos de Fanno. Observe que nós precisamos combinar uma relação que represente a lei de conservação da quantidade de movimento linear do escoamento com o conjunto de equações derivadas neste capítulo para que seja possível quantificar o comportamento dos escoamentos de Fanno.

A aplicação da equação da quantidade de movimento linear (Eq. 5.22) ao escoamento de Fanno no volume de controle mostrado na Fig. 11.19a resulta em

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - R_x = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

onde R_x é a força de atrito exercida no escoamento. Como $A_1 = A_2 = A$ e $\dot{m} = \rho AV = \text{constante}$, temos

$$p_1 - p_2 - \frac{R_x}{A} = \rho V(V_2 - V_1) \quad (11.84)$$

A forma diferencial da Eq. 11.84, que é válida para o escoamento de Fanno através do volume de controle semi-infinitesimal mostrado na Fig. 11.19b, é

$$-dp - \frac{\tau_p \pi D dx}{A} = \rho V dV \quad (11.85)$$

A tensão na parede, τ_p , está relacionada com o fator de atrito, f , pela Eq. 8.20, ou seja,

$$f = \frac{8\tau_p}{\rho V^2} \quad (11.86)$$

Tabela 11.1

Resumo do Comportamento do Escoamento de Fanno

Parâmetro	Escoamento	
	Subsônico	Supersônico
Temperatura de estagnação	Constante	Constante
Ma	Aumenta (o máximo é 1)	Diminui (o mínimo é 1)
Atrito	Acelera o escoamento	Desacelera o escoamento
Pressão	Diminui	Aumenta
Temperatura	Diminui	Aumenta

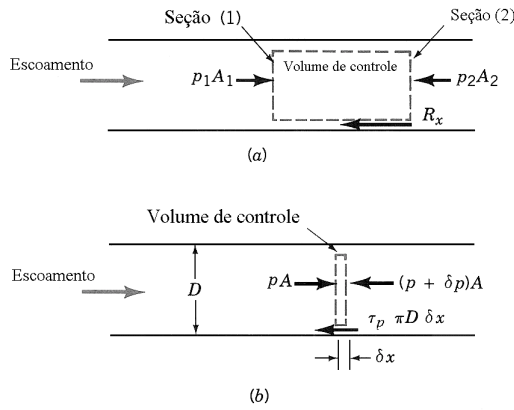


Figura 11.19 (a) Volume de controle finito e (b) Volume de controle semi-infinitesimal.

Aplicando a Eq. 11.86 na Eq. 11.85 e lembrando que $A = \pi D^2/4$, obtemos

$$-dp - f \rho \frac{V^2}{2} \frac{dx}{D} = \rho V dV \tag{11.87}$$

ou

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{p} \frac{\rho V^2}{2} \frac{dx}{D} + \frac{\rho}{p} \frac{d(V^2)}{2} = 0 \tag{11.88}$$

Combinando a equação dos gases perfeitos (Eq. 11.1), com a da velocidade do som em gases perfeitos (Eq. 11.36) e a definição do número de Mach (Eq. 11.46) com a Eq. 11.88, temos

$$\frac{dp}{p} + \frac{fk}{2} \text{Ma}^2 \frac{dx}{D} + k \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{d(V^2)}{V^2} = 0 \tag{11.89}$$

Como $V = \text{Ma } c = \text{Ma} (RTk)^{1/2}$,

$$V^2 = \text{Ma}^2 k RT$$

ou

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{d(\text{Ma}^2)}{\text{Ma}^2} + \frac{dT}{T} \tag{11.90}$$

A aplicação da equação da energia (Eq. 5.69) ao escoamento de Fanno levou a Eq. 11.74. Se a Eq. 11.74 for diferenciada e dividida pela temperatura, obtemos

$$\frac{dT}{T} + \frac{d(V^2)}{2c_p T} = 0 \tag{11.91}$$

A combinação das Eqs. 11.14, 11.36 e 11.46 com a Eq. 11.91 fornece

$$\frac{dT}{T} + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \frac{d(V^2)}{V^2} = 0 \tag{11.92}$$

Combinando a equação anterior com a Eq. 11.90,

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{d(\text{Ma}^2)/\text{Ma}^2}{1 + [(k-1)/2] \text{Ma}^2} \tag{11.93}$$

Nós podemos combinar as Eqs. 11.77, 11.79 e 11.90 para obter

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{V^2} - \frac{d(\text{Ma}^2)}{\text{Ma}^2} \tag{11.94}$$

Aplicando a Eq. 11.89 na equação anterior,

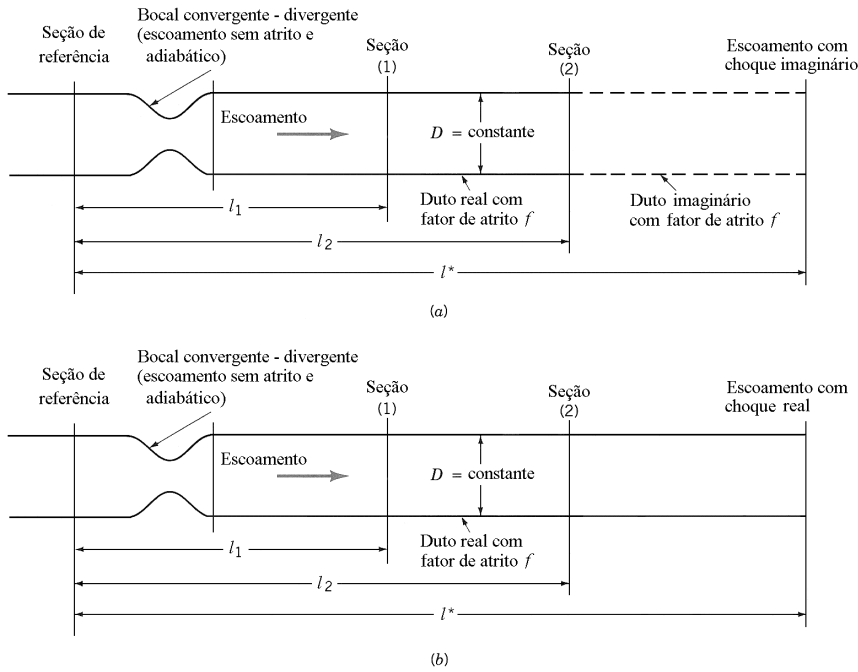


Figura 11.20 (a) Escoamento de Fanno não bloqueado e (b) Escoamento de Fanno bloqueado.

$$\frac{1}{2}(1+k Ma^2)\frac{d(V^2)}{V^2} - \frac{d(Ma^2)}{Ma^2} + \frac{fk}{2}Ma^2 \frac{dx}{D} = 0 \tag{11.95}$$

Finalmente, combinando as Eqs. 11.93 e 11.95,

$$\frac{(1-Ma^2)d(Ma^2)}{\{1+[(k-1)/2]Ma^2\}kMa^4} = f \frac{dx}{D} \tag{11.96}$$

A Eq. 11.96 pode ser integrada de uma seção a outra do escoamento de Fanno. Nós escolhemos utilizar o estado crítico (*) como estado de referência e por isto nós vamos integrar a Eq. 11.96 de um estado a montante até o estado crítico. Assim,

$$\int_{Ma}^{Ma^*=1} \frac{(1-Ma^2)d(Ma^2)}{\{1+[(k-1)/2]Ma^2\}kMa^4} = \int_l^{l^*} f \frac{dx}{D} \tag{11.97}$$

onde l é o comprimento medido entre a seção arbitrária e uma seção no escoamento de Fanno. Nós podemos obter uma solução aproximada desta integral admitindo que o fator de atrito é constante no intervalo $l-l^*$ e que o gás perfeito apresenta k constante. Procedendo deste modo,

$$\frac{1}{k} \frac{(1-Ma^2)}{Ma^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{[(k+1)/2]Ma^2}{1+[(k+1)/2]Ma^2} \right\} = \frac{f(l^*-l)}{D} \tag{11.98}$$

Observe que, para um dado gás, os valores de $f(l^*-l)/D$ podem ser tabelados em função do número de Mach do escoamento de Fanno. Por exemplo, a Fig. 11.35 apresenta os valores de $f(l^*-l)/D$ em função do número de Mach para os escoamentos de ar ($k = 1,4$). Note que o estado crítico não precisa existir no escoamento de Fanno que estamos considerando porque a próxima relação é sempre válida entre duas seções quaisquer de um dado escoamento de Fanno.

$$\frac{f(l^*-l_2)}{D} - \frac{f(l^*-l_1)}{D} = \frac{f}{D}(l_1-l_2) \tag{11.99}$$

A Fig. 11.20 ilustra o significado físico da Eq. 11.99.

Para um dado escoamento de Fanno (razão entre calores específicos constante, diâmetro do tubo e fator de atrito fixos), o comprimento de tubo necessário para alterar o número de Mach do escoamento de Ma_1 para Ma_2 pode ser determinado com as Eqs. 11.98 e 11.99 (ou com uma figura similar a Fig. 11.35). Nós precisamos desenvolver outras equações para obter os valores das outras propriedades do fluido no escoamento de Fanno.

Combinando as Eqs. 11.90 e 11.92, temos

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)}{2\{1+[(k-1)/2]Ma^2\}}d(Ma^2) \quad (11.100)$$

Integrando a Eq. 11.100 de um estado qualquer a montante do estado crítico e o estado crítico (*) no escoamento de Fanno leva a

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(k+1)/2}{1+[(k-1)/2]Ma^2} \quad (11.101)$$

As Eqs. 11.68 e 11.69 nos permitem escrever

$$\frac{V}{V^*} = \frac{Ma(kRT)^{1/2}}{(kRT^*)^{1/2}} = Ma\left(\frac{T}{T^*}\right)^{1/2} \quad (11.102)$$

Aplicando a Eq. 11.101 na Eq. 11.102,

$$\frac{V}{V^*} = \left\{ \frac{[(k+1)/2]Ma^2}{1+[(k-1)/2]Ma^2} \right\}^{1/2} \quad (11.103)$$

A equação da continuidade (Eq. 11.40) indica que no escoamento de Fanno

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} \quad (11.104)$$

Combinando as Eqs. 11.103 e 11.104,

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left\{ \frac{1+[(k-1)/2]Ma^2}{[(k+1)/2]Ma^2} \right\}^{1/2} \quad (11.105)$$

A equação de estado dos gases perfeitos fornece

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{T}{T^*} \quad (11.106)$$

Combinando as Eqs. 11.101, 11.105 e 11.106, temos

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{Ma} \left\{ \frac{(k+1)/2}{1+[(k-1)/2]Ma^2} \right\}^{1/2} \quad (11.107)$$

Finalmente, a razão entre as pressões de estagnação pode ser expressa por

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \left(\frac{p_0}{p} \right) \left(\frac{p}{p^*} \right) \left(\frac{p^*}{p_0^*} \right) \quad (11.108)$$

Utilizando as Eqs. 11.59 e 11.107,

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{Ma} \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right) \right]^{[(k+1)/2(k-1)]} \quad (11.109)$$

A Fig. 11.35 apresenta os valores de $f(l^* - l)/D$, T/T^* , V/V^* , p/p^* e p_0/p_0^* em função do número de Mach para o escoamento de Fanno com $k = 1,4$ (ar). Os próximos exemplos mostram como esta figura pode ser utilizada na resolução de problema que envolvem escoamentos de Fanno.

Exemplo 11.12

Ar atmosférico, $T_0 = 288 \text{ K}$ e $p_0 = 101 \text{ kPa}$ (abs), escoo em regime permanente através de um bocal convergente de modo adiabático e sem atrito e alimenta um tubo com seção transversal constante (veja a Fig. E11.12). O tubo apresenta comprimento e diâmetro iguais a 2 m e 0,1 m. Admita que o fator de atrito médio deste escoamento é igual a 0,02. Determine o valor da vazão máxima neste tubo. Calcule, para a vazão máxima, os valores da temperatura estática, da pressão estática, da temperatura de estagnação, da pressão de estagnação e das velocidades nas seções de alimentação [seção (1)] e de descarga [seção (2)] do tubo. Faça um esboço do diagrama $T - s$ deste escoamento.

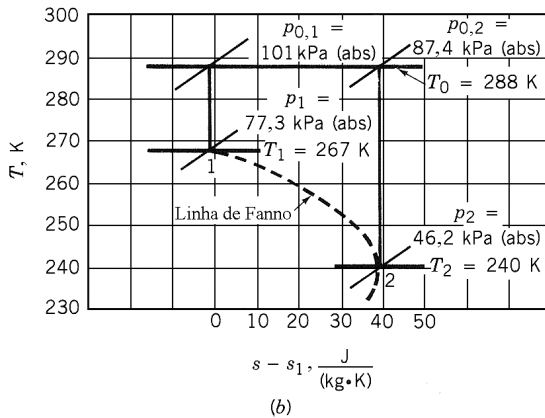
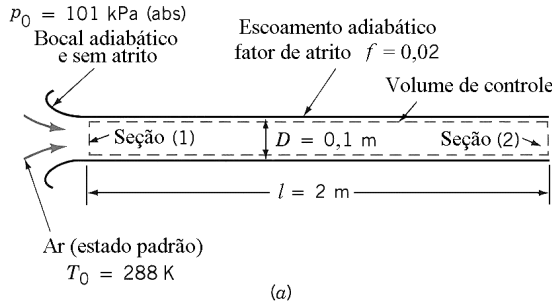


Figura E11.12

Solução Nós vamos considerar que o escoamento no bocal convergente é isentrópico e que o escoamento no tubo é do tipo Fanno. Uma diminuição da pressão na seção de descarga do tubo provoca o aumento da vazão em massa no arranjo se o escoamento for subsônico. A vazão máxima no arranjo ocorrerá quando a pressão na seção de descarga no tubo proporcionar um escoamento que apresenta $Ma = 1$ na seção de descarga do tubo (escoamento bloqueado). Qualquer diminuição da pressão na vizinhança da seção de descarga do tubo não afetará a vazão em massa no arranjo.

Para a condição de vazão em massa máxima, o escoamento no tubo com seção transversal constante precisa estar bloqueado. Assim,

$$\frac{f(l^* - l_1)}{D} = \frac{f(l_2 - l_1)}{D} = \frac{(0,02)(2)}{(0,1)} = 0,4 \tag{1}$$

Nós podemos utilizar a Eq. 11.98 para determinar o valor do número de Mach na seção de alimentação do tubo [seção (1)] com este valor de $f(l^* - l)/D$. As Eqs. 11.101, 11.103, 11.107 e 11.109 podem ser utilizadas para determinar os valores de T_1/T^* , V_1/V^* , p_1/p^* e $p_{0,1}/p_0^*$ porque já conhecemos o valor de Ma_1 . De modo análogo, nós podemos determinar estes valores utilizando a Fig. 11.35 porque o escoamento é de ar ($k = 1,4$). Para simplificar, nós vamos utilizar esta figura na solução do problema.

O número de Mach na seção de alimentação do tubo, Ma_1 , também representa o número de Mach na garganta do bocal. Assim, as equações isoentrópicas da Sec. 11.4, ou a Fig. 11.34, podem ser utilizadas para a determinação dos parâmetros do escoamento no bocal. Nós vamos utilizar a Fig. 11.34 na solução deste problema. Assim, conhecendo o valor de Ma_1 nós podemos utilizar a Fig. 11.34 para determinar os valores de T_1/T_0 , p_1/p_0 e ρ_1/ρ_0 . Lembre que os valores de T_0 , p_0 e ρ_0 são constantes no escoamento isoentrópico através do bocal. Assim, os valores de T_1 , p_1 e ρ_1 podem ser determinados facilmente.

Como T_0 também permanece constante no escoamento através do tubo (veja a Eq. 11.75), nós podemos utilizar a Eq. 11.63 para obter T^* . Deste modo,

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{1,4+1} = 0,833 \quad (2)$$

Como $T_0 = 288$ K, temos

$$T^* = (0,833)(288) = 240 \text{ K} = T_2 \quad (3)$$

Nós podemos calcular V^* com a Eq. 11.36 porque já conhecemos o valor de T^* . Assim,

$$V^* = (kRT^*)^{1/2} = [(1,4)(286,9)(240)]^{1/2} = 310 \text{ m/s} = V_2 \quad (4)$$

Agora, o valor de V_1 pode ser obtido com V^* e V_1/V^* . A equação da continuidade indica que

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 \quad (5)$$

Lembrando que

$$\frac{f(l^* - l_1)}{D} = 0,4 \quad (6)$$

a Fig. 11.35 indica

$$Ma_1 = 0,63 \quad (7)$$

$$\frac{T_1}{T^*} = 1,1 \quad (8)$$

$$\frac{V_1}{V^*} = 0,66 \quad (9)$$

$$\frac{p_1}{p^*} = 1,7 \quad (10)$$

$$\frac{p_{0,1}}{p_0^*} = 1,16 \quad (11)$$

Como $Ma_1 = 0,63$, a Fig. 11.34 fornece

$$\frac{T_1}{T_0} = 0,93 \quad (12)$$

$$\frac{p_1}{p_{0,1}} = 0,76 \quad (13)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{0,1}} = 0,83 \quad (14)$$

Utilizando as Eqs. (4) e (9), encontramos

$$V_1 = (0,66)(310) = 205 \text{ m/s}$$

Já a Eq. (14) indica que

$$\rho_1 = 0,83 \rho_{0,1} = (0,83)(1,23) = 1,02 \text{ kg/m}^3$$

e a Eq. (5) fornece

$$\dot{m} = (1,02) \left[\frac{\pi (0,1)^2}{4} \right] (206) = 1,65 \text{ kg/s}$$

A temperatura na seção (1) pode ser calculada com a Eq. (12), ou seja,

$$T_1 = (0,93)(288) = 268 \text{ K}$$

A pressão na seção (1) pode ser determinada com a Eq. (13),

$$p_1 = (0,76)(101) = 77 \text{ kPa (abs)}$$

A temperatura de estagnação permanece constante neste escoamento, isto é,

$$T_{0,1} = T_{0,2} = 288 \text{ K}$$

A pressão de estagnação, p_0 , na seção de alimentação do tubo é igual a pressão de estagnação no escoamento isoentrópico no bocal. Assim,

$$p_{0,1} = 101 \text{ kPa (abs)}$$

Nós podemos utilizar as Eqs. (10) e (13) para determinar a pressão na seção de descarga do duto ($p_2 = p^*$). Deste modo,

$$p_2 = \left(\frac{p^*}{p_1} \right) \left(\frac{p_1}{p_{0,1}} \right) (p_{0,1}) = \left(\frac{1}{1,7} \right) (0,76)(101) = 45 \text{ kPa (abs)}$$

A pressão de estagnação na descarga do tubo pode ser determinada com a Eq. (11). O valor da pressão de estagnação nesta seção é 84 kPa (abs). Observe que a pressão de estagnação, p_0 , diminui ao longo do escoamento de Fanno. Isto é um reflexo do atrito existente no escoamento de Fanno. A utilização das Figs. 11.34 e 11.35 facilita bastante a solução de problemas que envolvem escoamentos de Fanno. O diagrama $T - s$ deste escoamento está mostrado na Fig. E11.12b. Note que a diferença de entropia $s_2 - s_1$ foi obtida com a Eq. 11.22.

Exemplo 11.13

O tubo do Exemplo 11.12 é cortado pela metade mas a pressão na seção de descarga do tubo é mantida igual ao valor referente ao escoamento bloqueado do exemplo anterior ($p_d = 45 \text{ kPa (abs)}$). A vazão em massa no tubo aumentará ou diminuirá? Admita que f continua igual a 0,02.

Solução Nós vamos admitir que o escoamento continua bloqueado e verificaremos se esta hipótese é correta verificando se $p_d < p^*$. Se isto não ocorrer a nossa hipótese inicial está incorreta. Se o escoamento está bloqueado, nós podemos calcular a vazão no tubo do mesmo modo daquele utilizado no Exemplo 11.12. Se o escoamento não está bloqueado, nós teremos que formular um processo de solução alternativo.

Se o escoamento está bloqueado,

$$\frac{f(l^* - l_1)}{D} = \frac{(0,02)(1)}{(0,1)} = 0,2$$

A Fig. 11.35 indica que, para esta condição, $Ma_1 = 0,70$ e $p_1/p^* = 1,5$. Já a Fig. 11.34 indica, para $Ma = 0,70$,

$$\frac{p_1}{p_0} = 0,72$$

A pressão na seção de descarga do tubo ($p_2 = p^*$) pode ser calculada com

$$p_2 = p^* = \left(\frac{p^*}{p_1} \right) \left(\frac{p_1}{p_{0,1}} \right) (p_{0,1}) = \left(\frac{1}{1,5} \right) (0,72)(101) = 48,5 \text{ kPa (abs)}$$

Note que $p_d < p^*$ e, por este motivo, a nossa hipótese inicial é adequada. A pressão no escoamento na seção de descarga do tubo é maior do que a pressão ambiente neste local. A queda de pressão final do escoamento [de 48,5 kPa (abs) a 45 kPa (abs)] ocorre a montante da seção de descarga do tubo e através de um escoamento tridimensional bastante complexo.

Nós vamos utilizar a equação da continuidade para determinar a vazão em massa neste escoamento. Deste modo,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 \quad (1)$$

A massa específica na seção (1) pode ser calculada com

$$\frac{\rho_1}{\rho_{0,1}} = 0,79 \quad (2)$$

Este valor foi obtido com $Ma_1 = 0,7$ na Fig. 11.34. Assim,

$$\rho_1 = (0,79)(1,23) = 0,97 \text{ kg/m}^3 \quad (3)$$

A Fig. 11.35 indica que, $Ma_1 = 0,7$, o valor de V_1 é

$$\frac{V_1}{V^*} = 0,73 \quad (4)$$

O valor de V^* é o mesmo do calculado no Exemplo 11.12,

$$V^* = 310 \text{ m/s} \quad (5)$$

Utilizando as Eqs. (4) e (5),

$$V_1 = (0,73)(310) = 226 \text{ m/s} \quad (6)$$

A vazão em massa no tubo pode ser determinada com as Eqs. (1), (3) e (6). Assim,

$$\dot{m} = (0,97) \left[\frac{\pi (0,1)^2}{4} \right] (226) = 1,73 \text{ kg/s}$$

A vazão em massa no tubo encurtado é maior do que a vazão no tubo original (onde $\dot{m} = 1,65 \text{ kg/s}$). Esta tendência é normal nos escoamentos de Fanno subsônicos. Para o mesmo estado de estagnação a montante do escoamento e pressão de descarga no tubo, a vazão em massa no escoamento de Fanno diminuirá com o aumento de comprimento de tubo se o escoamento for subsônico. De modo análogo, a vazão em massa diminuirá se o comprimento do tubo permanecer constante e o fator de atrito for aumentado.

Exemplo 11.14

Nós desejamos que a vazão em massa no tubo do Exemplo 11.13 (comprimento = 1 m) seja igual àquela calculada no Exemplo 11.12 ($\dot{m} = 1,65 \text{ kg/s}$). Determine o número de Mach na seção de descarga do tubo, Ma_2 , e a pressão na seção de descarga do tubo, p_2 , necessários para que isto ocorra. Admita que o fator de atrito continua igual a 0,02.

Solução Como a vazão é aquela calculada no Exemplo 11.12, os valores do número de Mach e das outras propriedades do escoamento na seção de alimentação do tubo são iguais aos calculados no Exemplo 11.12. Assim, $Ma_1 = 0,63$ e a Fig. 11.35 fornece

$$\frac{f(l^* - l_1)}{D} = 0,4$$

Para este exemplo,

$$\frac{f(l_2 - l_1)}{D} = \frac{f(l^* - l_1)}{D} - \frac{f(l^* - l_2)}{D}$$

ou

$$\frac{(0,02)(1)}{(0,1)} = 0,4 - \frac{f(l^* - l_2)}{D}$$

Deste modo,

$$\frac{f(l^* - l_2)}{D} = 0,2 \quad (1)$$

Para esta condição, a Fig. 11.35 indica que

$$\text{Ma}_2 = 0,70$$

e

$$\frac{p_2}{p^*} = 1,5 \quad (2)$$

O valor de p_2 pode ser determinado com

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p^*} \right) \left(\frac{p^*}{p_1} \right) \left(\frac{p_1}{p_{0,1}} \right) (p_{0,1})$$

onde a razão p_2/p^* é dada pela Eq. (2) e outros termos podem ser encontrados na solução do Exemplo 11.12. Assim,

$$p_2 = (1,5) \left(\frac{1}{1,7} \right) (0,76) (101) = 68,0 \text{ kPa (abs)}$$

Note que a pressão na seção de descarga do tubo curto, necessária para transportar a mesma vazão do que aquela no tubo longo, é mais alta do que a pressão na seção de descarga do tubo do Exemplo 11.12. Lembre que esta conclusão está vinculada a hipótese de que os coeficientes de atrito dos dois escoamentos são iguais. Observe que o escoamento no tubo mais curto não está bloqueado.

11.5.2 Escoamento Invíscido e com Transferência de Calor em Dutos com Seção Transversal Constante (Escoamento de Rayleigh)

Considere o escoamento unidimensional, em regime permanente e sem atrito de um gás perfeito num duto com seção transversal constante (veja a Fig. 11.21). Este escoamento é conhecido como o escoamento de Rayleigh. A aplicação da equação da quantidade de movimento linear (Eq. 5.22) ao escoamento de Rayleigh através do volume de controle finito esboçado na Fig. 11.21 resulta em

$$p_1 A_1 + \dot{m} V_1 = p_2 A_2 + \dot{m} V_2$$

ou

$$p + \frac{(\rho V)^2}{\rho} = \text{constante} \quad (11.110)$$

Combinando a equação anterior com a de estado dos gases perfeitos (Eq. 11.1), obtemos

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{p} = \text{constante} \quad (11.111)$$

A seção transversal do duto é constante nos escoamentos de Rayleigh. Assim, a aplicação da equação da continuidade (Eq. 11.40) fornece

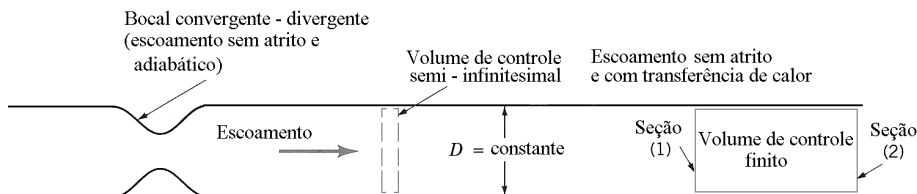


Figura 11.21 Escoamento de Rayleigh.

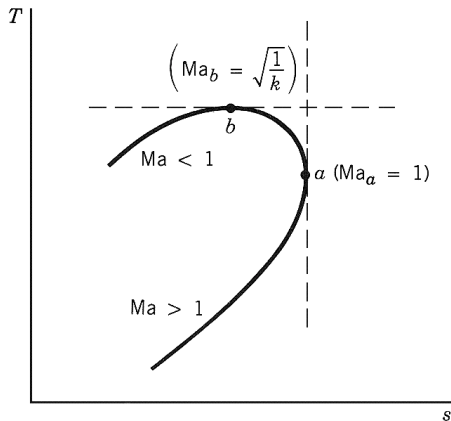


Figura 11.22 Diagrama $T - s$ do escoamento de Rayleigh.

$$\rho V = \text{constante}$$

Note que a Eq. 11.111 pode ser utilizada para determinar a distribuição de temperatura nos escoamentos de Rayleigh se conhecermos a distribuição de pressão no escoamento. Nós podemos utilizar a Eq. 11.76 para construir o diagrama $T - s$ deste escoamento. As Eqs. 11.76 e 11.111 podem ser resolvidas simultaneamente para fornecer a curva esboçada na Fig. 11.22. A curva indicada na Fig. 11.22 é conhecida como a linha de Rayleigh.

Exemplo 11.15

O escoamento de ar ($k = 1,4$) num tubo pode ser considerado como invíscido. As propriedades do escoamento na seção de entrada do tubo são

$$\begin{aligned} T_0 &= 288,2 \text{ K} \\ T_1 &= 285,9 \text{ K} \\ p_1 &= 98,6 \text{ kPa (abs)} \end{aligned}$$

Note que estas propriedades são iguais às que estão na formulação do Exemplo 11.11. Admitindo que o escoamento pode ser modelado como um de Rayleigh, determine a temperatura e a variação de entropia específica em várias seções do escoamento e construa a linha de Rayleigh deste escoamento.

Solução Nós podemos utilizar a Eq. 11.111

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{p} = \text{constante} \quad (1)$$

e a Eq. 11.76

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} \quad (2)$$

para construir a linha de Rayleigh. Nós precisamos conhecer os valores da constante de gás perfeito e do calor específico a pressão constante do ar. A Tab. 1.6 fornece o valor de R do ar, ou seja,

$$R = 286,9 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

O calor específico a pressão constante pode ser determinado com a Eq. 11.14,

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = \frac{(286,9)(1,4)}{(1,4-1)} = 1004,2 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

O valor da vazão em massa por unidade de área da seção transversal, ρV , é igual aquele calculado no Exemplo 11.11, ou seja, $\rho V = 81,47 \text{ kg/m}^2$. Para as condições fornecidas na seção de alimentação do tubo, seção (1), temos

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{\rho} = 98,6 \times 10^3 + \frac{(81,47)^2 (286,9)(285,9)}{98,6 \times 10^3} = 1,04 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (3)$$

Nós podemos utilizar a Eq. (3) para determinar a temperatura nas diversas seções transversais do escoamento. Admitindo que a pressão numa dada seção é igual a 93,0 kPa, temos

$$93,0 \times 10^3 + \frac{(81,47)^2 (286,9)T}{93,0 \times 10^3} = 1,04 \times 10^5 \text{ Pa}$$

ou

$$T = 537 \text{ K}$$

Nós podemos calcular a variação de entropia específica, $s - s_1$, com a Eq. (2). Deste modo,

$$\begin{aligned} s - s_1 &= (1004,2) \ln \frac{537}{285,9} - 286,9 \ln \frac{93,0}{98,6} \\ &= 649,8 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \end{aligned}$$

A próxima tabela pode ser construída repetindo o processo de cálculo de T e da variação de entropia específica em função de uma pressão admitida. Note que a Fig. E11.15 foi desenhada com os valores apresentados na tabela.

p (kPa (abs))	T (K)	$s - s_1$ (J/(kg · K))
93,0	537	649,8
86,2	811	1084,3
79,3	1033	1351,4
72,4	1205	1531,7
62,1	1369	1704,4
55,2	1416	1772,1
52,4	1421	1790,3
51,7	1421	1794,2
48,3	1413	1808,5
43,4	1382	1816,4
41,4	1361	1814,9
37,9	1316	1806,0
34,5	1259	1788,8
31,0	1189	1761,6
27,6	1106	1723,3
13,8	653	1392,5
6,9	352	970,5

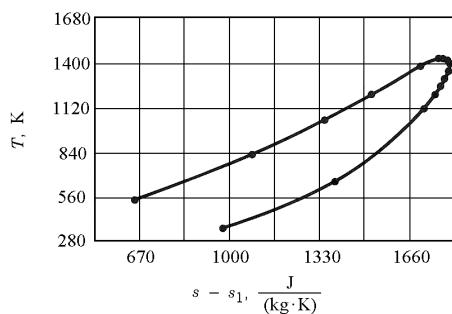


Figura E11.15

A linha de Rayleigh da Fig. 11.22 apresenta $ds/dT = 0$ no ponto a . Nós agora vamos investigar o significado físico desta relação. A diferenciação da equação da quantidade de movimento linear para o escoamento de Rayleigh (Eq. 11.110) fornece

$$dp = -\rho V dV$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} = -V dV \quad (11.112)$$

Combinando a Eq. 11.112 com a segunda equação de Tds (Eq. 11.18), obtemos

$$T ds = \tilde{dh} + V dV \quad (11.113)$$

Se admitirmos que o fluido se comporta como um gás perfeito (Eq. 11.7), temos

$$\tilde{dh} = c_p dT$$

e a Eq. 11.113 pode ser reescrita como

$$T ds = c_p dT + V dV$$

ou

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} + \frac{V}{T} \frac{dV}{dT} \quad (11.114)$$

A combinação das Eqs. 11.1, 11.77, 11.79, 11.112 e 11.114 fornece

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} + \frac{V}{T} \frac{1}{[(T/V) - (V/R)]} \quad (11.115)$$

A Eq. 11.115 indica que

$$V_a = (kRT_a)^{1/2} \quad (11.116)$$

no ponto a da linha de Rayleigh (onde $ds/dT = 0$). A comparação das Eqs. 11.116 com a Eq. 11.36 nos mostra que o número de Mach do escoamento no ponto a é igual a 1, ou seja,

$$\text{Ma}_a = 1 \quad (11.117)$$

A linha de Rayleigh da Fig. 11.22 também apresenta $dT/ds = 0$ no ponto b . A Eq. 11.115 pode ser transformada em

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{ds/dT} = \frac{1}{(c_p/T) + (V/T)[(T/V) - (V/R)]^{-1}}$$

Assim, quando $dT/ds = 0$ (ponto b), temos

$$\text{Ma}_b = (1/k)^{1/2} \quad (11.118)$$

Note que o escoamento em b é sempre subsônico ($\text{Ma}_b < 1,0$) porque k é sempre maior do que 1.

Nós vamos aplicar a equação da energia ao escoamento de Rayleigh para entendermos melhor o seu comportamento. A aplicação da equação da energia (Eq. 5.69) ao escoamento de Rayleigh no volume de controle finito mostrado na Fig. 11.21 fornece

$$\dot{m} \left[\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right] = \dot{Q}_{\text{liq,e}}$$

Note que nós desprezamos a variação de energia potencial e que o trabalho realizado no volume de controle é nulo. A aplicação da equação da energia ao volume de controle semi – infinitesimal mostrado na Fig. 11.21 fornece

$$\tilde{dh} + V dV = \delta q \quad (11.119)$$

Tabela 11.2
Resumo das Características do Escoamento de Rayleigh

	Aquecimento	Resfriamento
Ma < 1	Acelera	Desacelera
Ma > 1	Desacelera	Acelera

onde δq é a transferência de calor por unidade de massa de fluido que escoar no volume de controle.

Se utilizarmos as relação $d\tilde{h} = c_p dT = Rk dT/(k-1)$ na Eq. 11.119, obtemos

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T} \left[\frac{V}{T} \frac{dT}{dV} + \frac{V^2 (k-1)}{kRT} \right]^{-1} \quad (11.120)$$

Se nós combinarmos as Eqs. 11.36 (velocidade do som num gás perfeito), 11.46 (definição do número de Mach), 11.77 (equação de estado para um gás perfeito), 11.79 (continuidade) e a 11.112 (quantidade de movimento linear) com a Eq. 11.120 (energia), temos

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T} \frac{1}{(1 - \text{Ma}^2)} \quad (11.121)$$

Esta equação indica que a velocidade do escoamento aumenta durante o aquecimento ($\delta q > 0$) e diminui durante o resfriamento ($\delta q < 0$) se o escoamento de Rayleigh é subsônico (Ma < 1). De outro lado, quando o escoamento de Rayleigh é supersônico (Ma > 1), o aquecimento provoca a desaceleração do escoamento e o resfriamento induz um aumento de velocidade do escoamento.

A segunda lei da termodinâmica indica que a entropia aumenta com o aquecimento e diminui com o resfriamento do escoamento desde que ele possa ser modelado como invíscido. Um resumo do comportamento do escoamento de Rayleigh pode ser visto na Tab. 11.2 e na Fig. 11.23. O escoamento ao longo da parte superior da linha de Rayleigh, onde está situado o ponto b , é subsônico. Neste trecho, o aquecimento do fluido provoca um aumento de velocidade do escoamento até que o número de Mach se torne igual a 1 (no ponto a). Note que, entre os pontos b e a da linha de Rayleigh, o aquecimento do fluido resulta numa diminuição de temperatura e que o resfriamento provoca um aumento da temperatura do escoamento. Estas tendências não são surpreendentes se nós considerarmos a temperatura de estagnação e as variações de velocidade que ocorrem entre os pontos a e b quando o fluido é aquecido ou resfriado. O escoamento ao longo da parte inferior da linha de Rayleigh é supersônico. Os escoamentos de Rayleigh podem ou não estar bloqueados. A quantidade de aquecimento, ou resfriamento, envolvido determina o que acontece em cada caso. Como no escoamento de Fanno, nós também podemos encontrar uma onda de choque normal nos escoamentos de Rayleigh. Lembre que estas ondas provocam uma desaceleração abrupta de escoamento supersônico para subsônico.

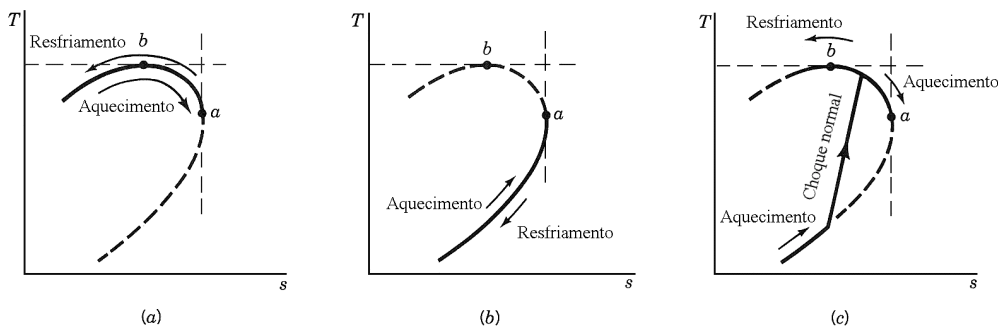


Figura 11.23 Escoamentos de Rayleigh: (a) subsônico, (b) supersônico e (c) onda de choque normal.

Nós agora vamos desenvolver um conjunto de equações para descrever quantitativamente o comportamento do escoamento de Rayleigh. Nós vamos escolher o estado representado pelo ponto a da Fig. 11.22 como estado de referência. Lembre que o número de Mach do escoamento no ponto a é igual a 1. Este estado de referência é útil mesmo que o escoamento de Rayleigh que desejamos analisar não esteja bloqueado.

O resultado da aplicação da equação da quantidade de movimento linear (Eq. 11.110) ao escoamento de Rayleigh entre uma seção a montante qualquer e a seção, real ou imaginária, onde o estado a é atingido, é

$$p + \rho V^2 = p_a + \rho_a V_a^2$$

ou

$$\frac{p}{p_a} + \frac{\rho V^2}{p_a} = 1 + \frac{\rho_a V_a^2}{p_a} \quad (11.122)$$

Combinando as Eqs. 1.11 (equação de estado de um gás perfeito), 11.36 (velocidade do som num gás perfeito) e a 11.46 (definição do número de Mach) com a Eq. 11.122, obtemos

$$\frac{p}{p_a} = \frac{1+k}{1+k\text{Ma}^2} \quad (11.123)$$

A equação de estado de um gás perfeito (Eq. 11.1) nos permite escrever

$$\frac{T}{T_a} = \frac{p}{p_a} \frac{\rho_a}{\rho} \quad (11.124)$$

A equação da conservação da massa (Eq. 11.40), quando a área da seção transversal do escoamento é constante, fica restrita a

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \frac{V}{V_a} \quad (11.125)$$

Se combinarmos este resultado com a Eqs. 11.36 (velocidade do som num gás perfeito) e a 11.46 (definição do número de Mach), obtemos

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \text{Ma} \left(\frac{T}{T_a} \right)^{1/2} \quad (11.126)$$

A combinação da Eq. 11.124 com a 11.126 fornece

$$\frac{T}{T_a} = \left(\frac{p}{p_a} \text{Ma} \right)^2 \quad (11.127)$$

que combinada com a Eq. 11.123 resulta em

$$\frac{T}{T_a} = \left[\frac{(1+k)\text{Ma}}{1+k\text{Ma}^2} \right]^2 \quad (11.128)$$

A próxima equação pode ser reescrita a partir da combinação das Eqs. 11.125, 11.126 e 11.128.

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \frac{V}{V_a} = \text{Ma} \left[\frac{(1+k)\text{Ma}}{1+k\text{Ma}^2} \right] \quad (11.129)$$

A equação da energia (Eq. 5.69) nos mostra que a temperatura de estagnação no escoamento de Rayleigh varia devido a transferência de calor. Note que

$$\frac{T_0}{T_{0,a}} = \left(\frac{T_0}{T} \right) \left(\frac{T}{T_a} \right) \left(\frac{T_a}{T_{0,a}} \right) \quad (11.130)$$

Nós podemos utilizar a Eq. 11.56 (desenvolvida para escoamentos isentrópicos de gases perfeitos em regime permanente) para avaliar T_0/T e $T_a/T_{0,a}$ porque os processos de estagnação são isentrópicos. A Eq. 11.128 pode ser utilizada para determinar T/T_a . Agora, combinando as Eqs. 11.130, 11.56 e 11.128, obtemos

$$\frac{T_0}{T_{0,a}} = \frac{2(k+1)Ma^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right)}{(1+kMa^2)^2} \quad (11.131)$$

A razão entre as pressões de estagnação pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{p_0}{p_{0,a}} = \left(\frac{p_0}{p} \right) \left(\frac{p}{p_a} \right) \left(\frac{p_a}{p_{0,a}} \right) \quad (11.132)$$

Nós podemos utilizar a Eq. 11.59 para avaliar p_0/p e $p_a/p_{0,a}$ porque os processos de estagnação são isentrópicos. A Eq. 11.123 pode ser utilizada para determinar p/p_a . Agora, combinando as Eqs. 11.59, 11.123 e 11.132, obtemos

$$\frac{p_0}{p_{0,a}} = \frac{(1+k)}{(1+kMa^2)} \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right) \right]^{k/(k-1)} \quad (11.133)$$

A Fig. 11.36 apresenta os valores de p/p_a , T/T_a , ρ_a/ρ ou V/V_a , $T_0/T_{0,a}$ e $p_0/p_{0,a}$ em função do número de Mach para escoamentos de Rayleigh de um fluido com $k = 1,4$ (ar, por exemplo). Os valores da figura foram determinados com as Eqs. 11.123, 11.128, 11.129, 11.131 e 11.133. O Exemplo 11.16 mostra a utilidade desta figura.

Exemplo 11.16

A Tab. 11.2 indica que os escoamentos de Rayleigh subsônicos aceleram quando aquecidos e desaceleram quando são resfriados. A mesma tabela mostra que ocorre o oposto quando o escoamento de Rayleigh é supersônico. Utilize a Fig. 11.36 para mostrar como a velocidade, o número de Mach, as temperaturas estática e de estagnação, as pressões estática e de estagnação variam no escoamento de Rayleigh quando este é (a) aquecido e (b) resfriado. Analise o caso aonde o escoamento de Rayleigh é subsônico e também aquele onde o escoamento é supersônico.

Solução Nós detectamos uma aceleração no escoamento quando o valor de V/V_a aumenta na Fig. 11.36 e uma desaceleração quando o valor de V/V_a diminui. A próxima tabela pode ser construída a partir da análise das Tab 11.2 e da Fig. 11.36.

	Aquecimento		Resfriamento	
	Subsônico	Supersônico	Subsônico	Supersônico
V	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta
Ma	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta
T	Aumenta para $0 \leq Ma \leq (k)^{-1/2} = 0,845$ Diminui para $(k)^{-1/2} \leq Ma \leq 1$	Aumenta	Diminui para $0 \leq Ma \leq (k)^{-1/2} = 0,845$ Aumenta para $(k)^{-1/2} \leq Ma \leq 1$	Diminui
T_0	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui
p	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui
p_0	Diminui	Diminui	Aumenta	Aumenta

A análise das tendências indicadas na tabela acima mostra que os efeitos do aquecimento nos escoamentos de Rayleigh são parecidos com os efeitos do atrito no escoamento de Fanno. O aquecimento e o atrito aceleram os escoamentos subsônicos e desaceleram os escoamentos

supersônicos. É muito importante lembrar que tanto o aquecimento quanto o atrito provocam a diminuição da pressão de estagnação. Como a perda de pressão de estagnação é indesejável do ponto de vista da eficiência mecânica dos equipamentos, é necessário sempre considerar a perda de pressão de estagnação nos processos de aquecimento em máquinas de fluxo.

11.5.3 Ondas de Choque Normais

As ondas de choque normais podem ocorrer nos escoamentos em dutos convergentes – divergentes e em dutos que apresentam seção transversal constante. Nós já vimos que as ondas de choque normais envolvem uma desaceleração brusca, de um escoamento supersônico para um subsônico, um aumento de pressão e um aumento de entropia específica. Para desenvolver as equações que descrevem o comportamento das ondas de choque normais nós vamos aplicar as equações básicas a um volume de controle que engloba completamente a onda de choque normal (veja a Fig. 11.24). Nós consideraremos um choque normal e, assim, o volume de controle deve ser muito fino (infinitesimal) e estacionário (☉ 11.5 – Ondas de choque).

A aplicação da equação da conservação da massa ao volume de controle indicado na Fig. 11.24 fornece

$$\rho V = \text{constante} \quad (11.134)$$

porque a variação de área no volume de controle é infinitesimal. Note que a Eq. 11.134 é idêntica a equação da continuidade utilizada nas análises dos escoamentos de Fanno e Rayleigh.

Nós vamos considerar que a força de atrito que atua no conteúdo do volume de controle com espessura infinitesimal é nula, que o gás que escoava através do choque se comporta como um gás perfeito e que os efeitos da aceleração da gravidade são desprezíveis. Assim, a aplicação da equação da quantidade de movimento linear ao volume de controle indicado na Fig. 11.24 indica que

$$p + \rho V^2 = \text{constante}$$

Como $p = \rho RT$,

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{p} = \text{constante} \quad (11.135)$$

A Eq. 11.135 é igual a equação da quantidade de movimento linear para o escoamento de Rayleigh (veja a Eq. 11.111).

O trabalho e a transferência de calor no volume de controle que engloba a onda de choque são nulos. Como o regime do escoamento é o permanente, a aplicação da equação da energia (Eq. 5.69) ao volume de controle acima descrito resulta em

$$\tilde{h} + \frac{V^2}{2} = \tilde{h}_0 = \text{constante}$$

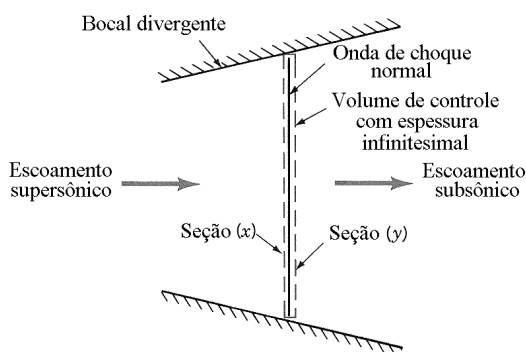


Figura 11.24 Volume de controle para a análise do choque normal.

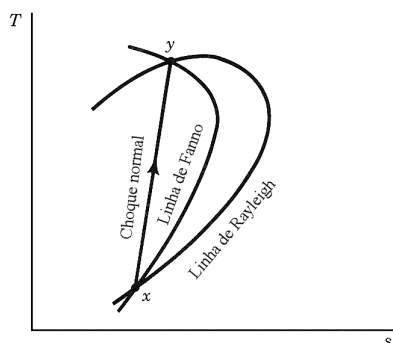


Figura 11.25 A relação entre o choque normal e as linhas de Fanno e de Rayleigh.

Se o fluido se comporta como um gás perfeito, $\tilde{h} - \tilde{h}_0 = c_p(T - T_0)$ e $p = \rho RT$. Nesta condição, a equação da energia pode ser reescrita do seguinte modo:

$$T + \frac{(\rho V)^2 T^2}{2c_p(p^2/R^2)} = T_0 = \text{constante} \quad (11.136)$$

Note que a Eq. 11.136 é idêntica a equação da energia para o escoamento de Fanno (veja a Eq. 11.75).

A relação que envolve Tds já utilizada nas análises dos escoamentos de gases perfeitos (Eq. 11.22) também é válida no escoamento através do choque normal (veja a Fig. 11.24) porque esta equação é uma relação entre propriedades termodinâmicas do fluido.

As equações indicadas nos parágrafos anteriores indicam que o escoamento em regime permanente através do choque normal pode ser descrito pelas mesmas equações que foram utilizadas para descrever os escoamentos de Fanno e de Rayleigh (a equação da energia nos escoamentos de Fanno e a equação da quantidade de movimento linear nos escoamentos de Rayleigh). Assim, para um certo gás perfeito (R e k), um dado produto (ρV) e condições na seção de entrada do choque normal (T_x , p_x e s_x), as condições após o choque (estado y) devem estar tanto na linha de Fanno quanto na linha de Rayleigh que passam pelo estado referente a seção de entrada do choque. A Fig. 11.25 ilustra esta afirmação. A nomenclatura usual utilizada na análise dos choques é um pouco diferente da utilizada neste livro pois o estado x normalmente é indicado com o subscrito 1 e o y com o subscrito 2. As linhas de Fanno e de Rayleigh não estão restritas a vizinhança do choque normal (veja as linhas contínuas da Fig. 11.26a e 11.26b). Por outro lado, as linhas hachuradas nas Figs. 11.26a, 11.26b e 11.26c são muito úteis para visualizar melhor o conjunto de equações que fornece a solução do problema do choque normal.

A segunda lei da termodinâmica estabelece que a onda de choque provoca um aumento de entropia do fluido. Esta lei e os esboços das interseções das linhas de Fanno e de Rayleigh, como as mostradas nas Figs. 11.25 e 11.26, nos mostram que o choque só pode ocorrer de um escoamento supersônico para um subsônico. De modo análogo, o ressalto hidráulico nos canais abertos (veja o Cap. 10) só ocorre de um escoamento supercrítico para um subcrítico.

Como os estados a montante e a jusante do choque normal podem ser representados pelas interseções supersônica e subsônica das linhas de Fanno e Rayleigh (estas interseções podem existir ou serem imaginárias), nós podemos utilizar as equações desenvolvidas para estes escoamentos para analisar quantitativamente o escoamento no choque normal. Por exemplo, para o linha de Rayleigh da Fig. 11.26b,

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{p_y}{p_a} \right) \left(\frac{p_a}{p_x} \right) \quad (11.137)$$

A Eq. 11.123, adequada para os escoamentos de Rayleigh, fornece

$$\frac{p_y}{p_a} = \frac{1+k}{1+k\text{Ma}_y^2} \quad (11.138)$$

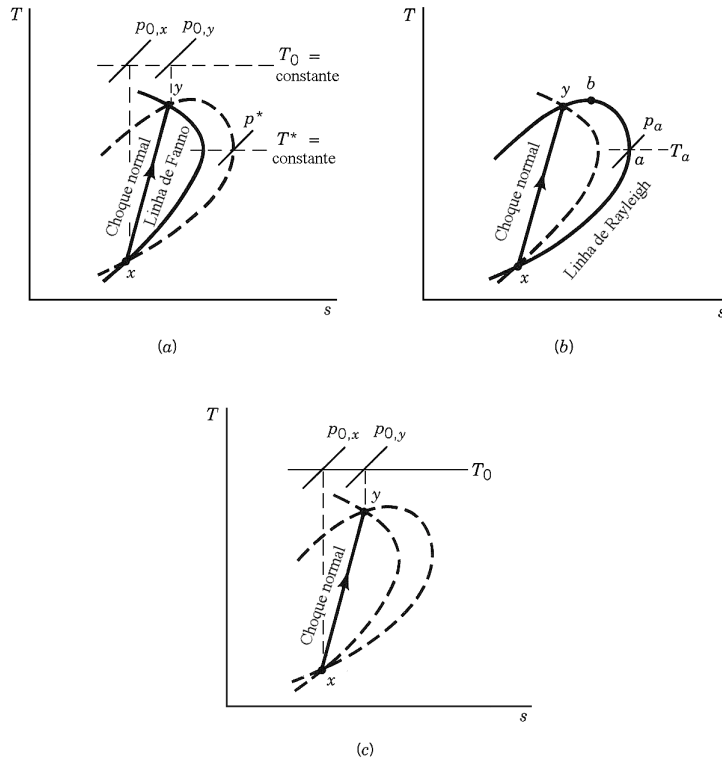


Figura 11.26 Choque normal no escoamento (a) de Fanno, (b) de Rayleigh e (c) adiabático e invíscido.

e

$$\frac{p_x}{p_a} = \frac{1+k}{1+k \text{Ma}_x^2} \tag{11.139}$$

Combinando as Eqs. 11.137, 11.138 e 11.139, obtemos

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1+k \text{Ma}_x^2}{1+k \text{Ma}_y^2} \tag{11.140}$$

Esta equação também pode ser obtida a partir de

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{p_y}{p^*} \right) \left(\frac{p^*}{p_x} \right)$$

Utilizando a equação do escoamento de Fanno (Eq. 11.107)

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left\{ \frac{(k+1)/2}{1+[(k-1)/2]\text{Ma}^2} \right\}^{1/2}$$

Como era esperado, a Eq. 11.140 também pode ser obtida a partir da equação da quantidade de movimento linear

$$p_x + \rho_x V_x^2 = p_y + \rho_y V_y^2$$

porque $\rho V^2/p = V^2/RT = kV^2/RTk = k \text{Ma}^2$.

Para o escoamento de Fanno da Fig. 11.26a,

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{T_y}{T^*} \right) \left(\frac{T^*}{T_x} \right) \quad (11.141)$$

Utilizando a Eq. 11.101 (adequada para escoamentos de Fanno), obtemos

$$\frac{T_y}{T^*} = \frac{(k+1)/2}{1 + [(k-1)/2]Ma_y^2} \quad (11.142)$$

e

$$\frac{T_x}{T^*} = \frac{(k+1)/2}{1 + [(k-1)/2]Ma_x^2} \quad (11.143)$$

Combinando as Eqs. 11.141, 11.142 e 11.143,

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + [(k-1)/2]Ma_x^2}{1 + [(k-1)/2]Ma_y^2} \quad (11.144)$$

Nós agora vamos desenvolver uma equação que nos permita determinar o número de Mach a jusante do choque normal, Ma_y , em função do número de Mach do escoamento a montante do choque, Ma_x . Se utilizarmos a equação de estado dos gases perfeitos (Eq. 11.1), temos

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{T_y}{T_x} \right) \left(\frac{\rho_y}{\rho_x} \right) \quad (11.145)$$

Utilizando a equação da continuidade,

$$\rho_x V_x = \rho_y V_y$$

que combinada com a Eq. 11.145 fornece

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{T_y}{T_x} \right) \left(\frac{V_x}{V_y} \right) \quad (11.146)$$

Se combinarmos esta equação com a definição do número de Mach (Eq. 11.46) e a equação da velocidade do som nos gases perfeitos (Eq. 11.36), obtemos

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{T_y}{T_x} \right)^{1/2} \left(\frac{Ma_x}{Ma_y} \right) \quad (11.147)$$

Agora, combinando as Eqs. 11.147 e 11.144, temos

$$\frac{p_y}{p_x} = \left\{ \frac{1 + [(k-1)/2]Ma_x^2}{1 + [(k-1)/2]Ma_y^2} \right\}^{1/2} \frac{Ma_x}{Ma_y} \quad (11.148)$$

Finalmente, a combinação desta equação com a Eq. 11.140 fornece

$$Ma_y^2 = \frac{Ma_x^2 + [2/(k-1)]}{[2k/(k-1)]Ma_x^2 - 1} \quad (11.149)$$

Nós podemos utilizar a Eq. 11.149 para calcular o valor do número de Mach a jusante de um choque normal desde que conheçamos o número de Mach a montante do choque normal. Como indica a Fig. 11.26, um choque normal só pode ocorrer quando $Ma_x > 1$ e a Eq. 11.149 mostra que Ma_y é sempre menor do que 1.

Se combinarmos as Eqs. 11.149 e 11.140, obtemos

Tabela 11.3
Resumo das Características da Onda de Choque Normal

Variável	Varição Através da Onda de Choque Normal
Número de Mach	Diminui
Pressão estática	Aumenta
Pressão de estagnação	Diminui
Temperatura estática	Aumenta
Temperatura de estagnação	Constante
Massa específica	Aumenta
Velocidade	Diminui

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{2k}{k+1} \text{Ma}_x^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (11.150)$$

Observe que é possível calcular a razão entre as pressões a jusante e a montante do choque normal se conhecermos o valor do número de Mach a montante do choque normal. De modo análogo, combinando as Eqs. 11.149 e 11.144,

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\{1 + [(k-1)/2]\text{Ma}_x^2\} \{2k/(k-1)\text{Ma}_x^2 - 1\}}{\{(k+1)^2/[2(k-1)]\}\text{Ma}_x^2} \quad (11.151)$$

A equação da continuidade para o escoamento através do choque normal indica que

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y} \quad (11.152)$$

e a equação de estado dos gases perfeitos mostra que

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \left(\frac{T_x}{T_y} \right) \quad (11.153)$$

Agora, combinando as Eqs. 11.150, 11.151, 11.152 e 11.153,

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y} = \frac{(k+1)\text{Ma}_x^2}{(k-1)\text{Ma}_x^2 + 2} \quad (11.154)$$

A razão entre as pressões de estagnação através do choque pode ser determinada com

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = \left(\frac{p_{0,y}}{p_y} \right) \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \left(\frac{p_x}{p_{0,x}} \right) \quad (11.155)$$

Combinando esta equação com as Eqs. 11.59, 11.149 e 11.150, obtemos

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = \frac{\left(\frac{k+1}{2} \text{Ma}_x^2 \right)^{k/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}_x^2 \right)^{k/(1-k)}}{\left(\frac{2k}{k+1} \text{Ma}_x^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{1/(k-1)}} \quad (11.156)$$

A Fig. 11.37 apresenta valores de Ma_y , razão entre pressões, p_y/p_x , razão entre temperaturas, T_y/T_x , razão entre massas específicas, ρ_y/ρ_x (ou razão entre velocidades, V_x/V_y), e razão entre as pressões de estagnação, $p_{0,y}/p_{0,x}$, em função do número de Mach a montante do choque, Ma_x . Estes valores são válidos para escoamentos de um fluido com $k = 1,4$ (por exemplo, o ar) em regime permanente e através de uma onda de choque normal. Os valores apresentados na figura foram calculados com as Eqs. 11.149, 11.150, 11.151, 11.154 e 11.156.

A Tab. 11.3 apresenta um resumo das características dos escoamentos através de uma onda de choque e ela pode ser construída a partir da análise dos valores das propriedades que podem ser encontradas na Fig. 11.37. Os Exemplos 11.17 e 11.18 ilustram como a Fig. 11.37 pode ser utilizada para resolver os problemas que envolvem ondas de choque normais.

Exemplo 11.17

Os projetistas que trabalham com mecânica de mecânica dos fluidos se preocupam muito com a minimização das perdas de energia disponível nos seus projetos. Os escoamentos adiabáticos e invíscidos não apresentam perda de energia disponível pois a entropia permanece constante nestes escoamentos ideais. Os escoamentos adiabáticos com atrito apresentam perda de energia disponível e aumento de entropia. Normalmente, quanto maior for o aumento de entropia maior será a perda de energia disponível. Mostre que, quanto maior o número de Mach, maior será a variação de entropia nos choques normais (e, portanto, maior será a perda de energia disponível). Confirme sua conclusão analisando o comportamento da variação de pressão de estagnação através do choque normal.

Solução Nós vamos admitir que o ar ($k = 1,4$) se comporta como um gás perfeito e, assim, nós podemos utilizar a Fig. 11.37 para resolver este problema. Nós vamos utilizar a Eq. 11.76 para determinar o aumento de entropia através do choque normal, ou seja,

$$s_y - s_x = c_p \ln \frac{T_y}{T_x} - R \ln \frac{p_y}{p_x} \quad (1)$$

A constante de gás perfeito do ar é $R = 286,9 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ e o calor específico a pressão constante pode ser calculado com a Eq. 11.14. Deste modo,

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = \frac{(286,9)(1,4)}{1,4-1} = 1004,2 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

Os valores de T_x/T_y e p_x/p_y da Eq. (1) podem ser obtidos na Fig. 11.37 em função do número de Mach a montante do choque. Observe que o valor da razão entre pressões de estagnação, $p_{0,y}/p_{0,x}$, também pode ser determinada, em função do número de Mach a montante do choque, na figura.

Por exemplo, para $\text{Ma}_x = 1,2$,

$$s_y - s_x = (1004,2)\ln(1,13) - (286,9)\ln(1,52) = 2,6 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

Nesta condição, a Fig.11.37 indica que

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = 0,99$$

A próxima tabela foi construída com o mesmo procedimento utilizado acima.

Quando o número de Mach do escoamento a montante do choque é baixo; por exemplo, $\text{Ma}_x = 1,1$; o escoamento através do choque é quase isoentrópico e a perda de pressão de estagnação é pequena. Entretanto, quando o número de Mach é alto, os valores do aumento de entropia específica e da perda de pressão de estagnação são significativos. Por exemplo, a perda de pressão de estagnação é cerca de 50% da pressão de estagnação a montante do choque quando $\text{Ma}_x = 2,5$.

Ma_x	$s_y - s_x, [\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$	$p_{0,y}/p_{0,x}$
1,0	0	1,0
1,2	2,6	0,99
1,5	20,8	0,93
2,0	93,8	0,72
2,5	199,3	0,50
3,0	319,4	0,33
3,5	443,6	0,21
4,0	566,4	0,14
5,0	798,8	0,06

É sempre interessante projetar os dispositivos que apresentam escoamentos supersônicos (por exemplo, as turbinas a gás modernas e os túneis de vento transônicos e supersônicos) de modo que o choque não exista ou, se a formação do choque for inevitável, que ocorra num local onde o número de Mach seja relativamente baixo (para que o choque seja fraco).

Também é interessante conhecer o aumento de pressão estática que ocorre no choque normal. O valor da relação entre as pressões estáticas, p_y/p_x , pode ser encontrado na Fig. 11.37 e a próxima tabela apresenta alguns valores na faixa $1,0 \leq Ma \leq 5,0$. Note que o gradiente de pressão no choque é adverso. Deste modo, nós podemos detectar uma separação do escoamento provocada pela instabilidade da camada limite (veja a Sec. 9.2.6). Assim, a interação choque – camada limite é muito importante no projeto de equipamentos que envolvem escoamentos com velocidade alta.

Ma_x	p_y/p_x
1,0	1,0
1,2	1,5
1,5	2,5
2,0	4,5
3,0	10
4,0	18
5,0	29

Exemplo 11.18

Uma sonda de pressão total é inserida num escoamento supersônico de ar. Uma onda de choque é formada logo a montante da cabeça da sonda que contém o orifício frontal de medição (veja a Fig. E11.18). A sonda indica uma pressão total de 4,14 bar (abs) e a temperatura de estagnação medida na sonda é igual a 556 K. A pressão estática do escoamento a montante do choque foi medida na parede do conduto e é igual a 82,7 kPa (abs). Nestas condições, determine o número de Mach e a velocidade deste escoamento.

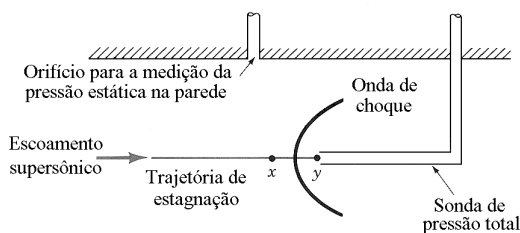


Figura E11.18

Solução Nós vamos admitir que o escoamento ao longo da trajetória de estagnação é isoentrópico a menos daquele no trecho referente a onda de choque. Nós vamos considerar que o choque é normal. Utilizando os dados apresentados na formulação do problema, temos

$$\frac{p_{0,y}}{p_x} = \left(\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} \right) \left(\frac{p_{0,x}}{p_x} \right) \quad (1)$$

onde $p_{0,y}$ é a pressão de estagnação medida pela sonda e p_x é a pressão estática medida pelo orifício localizado na parede do conduto. A pressão de estagnação a montante do choque, $p_{0,x}$, não é medida neste experimento.

Combinando as Eqs. (1), 11.156 e 11.59, obtemos

$$\frac{p_{0,y}}{p_x} = \frac{\left\{ \left[\frac{(k+1)}{2} \right] Ma_x^2 \right\}^{k/(k-1)}}{\left\{ 2k/(k+1) \right\} Ma_x^2 - \left[\frac{(k-1)}{(k+1)} \right] \right\}^{1/(k-1)}} \quad (2)$$

Esta equação é conhecida como a fórmula de Rayleigh para o tubo de Pitot. Os valores de $p_{0,y}/p_{x,x}$ são bastante importantes e por isto foram adicionados na Fig. 11.37 (que só é válida quando o k do fluido for igual a 1,4). Os dados do problema indicam que

$$\frac{p_{0,y}}{p_x} = \frac{4,14 \times 10^5}{82,7 \times 10^3} = 5,0$$

e a Fig. 11.37 indica

$$Ma_x = 1,9$$

Nós precisamos conhecer a temperatura estática a montante do choque para determinar a velocidade do escoamento. Nós podemos utilizar as Eqs. 11.36 e 11.46 para escrever

$$V_x = Ma_x c_x = Ma_x (RT_x k)^{1/2} \quad (3)$$

A temperatura de estagnação após o choque, $T_{0,y}$, foi medida e é igual a 556 K. Como a temperatura de estagnação permanece constante através do choque normal (veja a Eq. 11.136),

$$T_{0,x} = T_{0,y} = 556 \text{ K}$$

Nós podemos utilizar a Eq. 11.56, ou a Fig. 11.34, para determinar as propriedades a montante do choque. Deste modo, e para $Ma_x = 1,9$,

$$\frac{T_x}{T_{0,x}} = 0,59 \quad \text{ou} \quad T_x = (0,59)(556) = 328 \text{ K}$$

A velocidade do escoamento a montante do choque pode ser determinada com a Eq. (3), ou seja,

$$V_x = (1,9)[(1,4)(286,9)(328)]^{1/2} = 690 \text{ m/s}$$

Observe que a aplicação das equações incompressíveis dedicadas a medição de velocidade com tubos de Pitot (veja a Sec. 3.5) fornecem resultados muito diferentes e inadequados a esta aplicação.

Exemplo 11.19

Reconsidere o escoamento no duto convergente – divergente do Exemplo 11.8. Determine a razão entre a pressão na vizinhança da seção de descarga e a pressão de estagnação, $p_{III}/p_{0,x}$ (veja a Fig. 11.13), necessária para que exista uma onda de choque normal e estacionária na seção de descarga do duto ($x = +0,5 \text{ m}$). Qual o valor da razão entre a pressão na vizinhança da seção de descarga e a pressão de estagnação na seção de alimentação do duto necessária para que o choque esteja posicionado na seção localizada em $x = +0,3 \text{ m}$? Construa os diagramas $T - s$ destes escoamentos.

Solução Nós vimos, no Exemplo 11.8, que

$$Ma_{x=+0,5 \text{ m}} = 2,8$$

na solução com escoamento supersônico na parte divergente do duto e que a razão entre a pressão estática na seção de descarga do duto e a pressão de estagnação é

$$\frac{p_x}{p_{0,x}} = 0,04$$

Para $Ma_x = 2,8$, a Fig. 11.37 indica que

$$\frac{p_y}{p_x} = 9,0$$

e

$$\frac{p_y}{p_{0,x}} = \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \left(\frac{p_x}{p_{0,x}} \right) = (9,0)(0,04) = 0,36 = \frac{p_{III}}{p_{0,x}}$$

Quando a razão entre a pressão na vizinhança da seção de descarga do bocal e a pressão de estagnação for igual a 0,36, o ar acelerará no duto convergente – divergente até que o escoamento apresente número de Mach igual a 2,8 na seção de descarga do duto. Nesta seção, o escoamento é desacelerado até uma velocidade subsônica através de um choque normal que está posicionado na seção de descarga do duto. A razão entre a pressão de estagnação após o choque e aquela antes do choque, $p_{0,y}/p_{0,x}$, é igual a 0,38 (veja a Fig. 11.37 para $Ma_x = 2,8$). Observe que este choque produz um perda significativa na energia disponível no escoamento.

A tabela apresentada no Exemplo 11.8 indica, para $x = 0,3$ m, que

$$Ma_x = 2,14 \quad \text{e} \quad \frac{p_x}{p_{0,x}} = 0,10 \quad (1)$$

Para este número de Mach, a Fig. 11.37 fornece

$$\frac{p_y}{p_x} = 5,2 \quad Ma_y = 0,56 \quad \frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = 0,66 \quad (2)$$

A Fig. 11.34 indica, para $Ma_y = 0,56$, que

$$\frac{A_y}{A^*} = 1,24 \quad (3)$$

Se utilizarmos a equação das áreas das seções transversais do duto obtida no Exemplo 11.8 em $x = +0,3$ m, obtemos

$$\frac{A_2}{A_y} = \frac{0,1 + (0,5)^2}{0,1 + (0,3)^2} = 1,842 \quad (4)$$

Utilizando as Eqs. (3) e (4),

$$\frac{A_2}{A^*} = \left(\frac{A_y}{A^*} \right) \left(\frac{A_2}{A_y} \right) = (1,24)(1,842) = 2,28$$

Note que, para o escoamento isoentrópico a montante do choque, $A^* = 0,10$ m² (a área da seção transversal da garganta do duto) e que A^* , para o escoamento isoentrópico a jusante da onda de choque, é $A^* = A_2/2,28 = 0,35/2,28 = 0,15$ m². A Fig. 11.34 indica, para $A_2/A^* = 2,28$, que

$$Ma_2 = 0,26$$

e

$$\frac{p_2}{p_{0,y}} = 0,95 \quad (5)$$

Combinando os resultados apresentados nas Eqs. (2) e (5), obtemos

$$\frac{p_2}{p_{0,x}} = \left(\frac{p_2}{p_{0,y}} \right) \left(\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} \right) = (0,95)(0,66) = 0,63$$

O choque estará posicionado em $x = +0,3$ m quando a pressão na vizinhança da seção de descarga do bocal, p_2 , for igual a pressão de estagnação na entrada do duto, $p_{0,x}$, multiplicada por 0,63. Note que $p_2/p_{0,x} = 0,63$ é menor do que o valor desta relação para escoamento isoentrópico subsônico em todo o duto ($p_2/p_{0,x} = 0,98$, veja o Exemplo 11.8) e é maior do que o valor referente ao escoamento no duto com choque normal na seção de descarga do duto ($p_{III}/p_{0,x} = 0,36$, veja a Fig. 11.13).

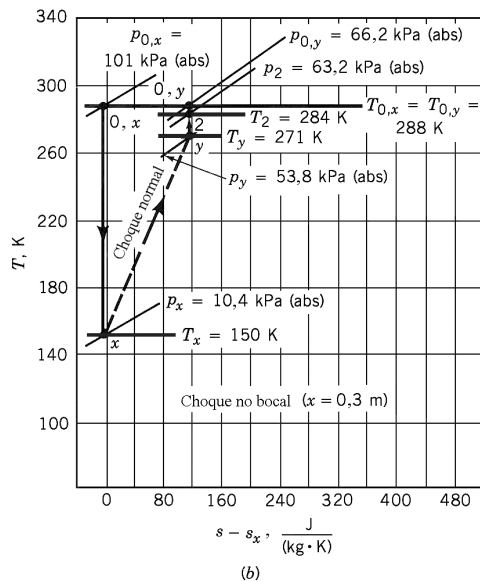
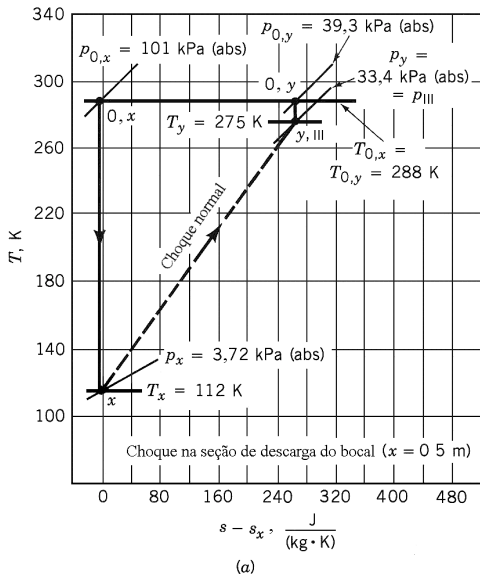


Figura E11.20

Observe, também, que a razão entre as pressões de estagnação para o escoamento no duto com choque em $x = +0,3$ m, $p_{0,y}/p_{0,x} = 0,66$, é muito maior do que a razão entre as pressões de estagnação quando o choque está posicionado na seção de descarga do duto. Os diagramas $T - s$ dos escoamentos analisados neste exemplo estão mostrados nas Figs. E11.19a e E11.19b.

11.6 Analogia Entre os Escoamentos Compressíveis e os em Canais Abertos

Os escoamentos compressíveis e os escoamentos incompressíveis em canais abertos apresentam várias características comuns. A analogia entre estes escoamentos é muito interessante porque muitos fenômenos encontrados nos escoamentos compressíveis bidimensionais podem ser demonstrados com experimentos baseados no escoamento num canal raso (como numa mesa d' água).

A propagação dos pulsos fracos de pressão (ondas sonoras) num fluido compressível pode ser considerada similar ao movimento de ondas de pequena amplitude na superfície livre do

escoamento num canal aberto. Em cada caso – escoamento bidimensional compressível e escoamento em canal aberto – a influência da velocidade do escoamento na forma das ondas é semelhante. Quando a velocidade do escoamento é menor do que a velocidade da onda, as frentes de onda podem se deslocar para a montante da fonte de onda e o escoamento é subsônico (escoamento compressível) ou subcrítico (escoamento em canal aberto). Quando a velocidade do escoamento é igual a velocidade da onda, as frentes de onda não podem se deslocar para a montante do ponto de geração das ondas e o escoamento é sônico (escoamento compressível) ou crítico (escoamento em canal aberto). Quando a velocidade do escoamento é maior do que a velocidade das ondas, o escoamento é supersônico (escoamento compressível) ou supercrítico (escoamento em canal aberto). Os choques normais só podem ocorrer nos escoamentos supersônicos e os ressaltos hidráulicos só podem ocorrer nos escoamentos supercríticos. A comparação das características dos choques normais (Sec. 11.5.3) com as dos ressaltos hidráulicos (Sec. 10.6.1) sugere que existe uma semelhança intensa entre estes fenômenos.

O parâmetro adimensional importante nos escoamentos compressíveis é o número de Mach,

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} \quad (11.46)$$

e o parâmetro importante nos escoamentos em canais abertos é o número de Froude,

$$\text{Fr} = \frac{V_{ca}}{(g y)^{1/2}} \quad (11.157)$$

onde V_{ca} é a velocidade média do escoamento no canal, g é a aceleração da gravidade e y é a profundidade do escoamento no canal. A velocidade de propagação de uma onda de pequena amplitude na superfície de um canal aberto, c_{ca} , é dada por (veja a Sec. 10.2.1)

$$c_{ca} = (g y)^{1/2} \quad (11.158)$$

Combinando as Eqs. 11.157 e 11.158, obtemos,

$$\text{Fr} = \frac{V_{ca}}{c_{ca}} \quad (11.159)$$

A análise das Eqs. 11.46 e 11.159 mostra a similaridade que existe entre os números de Mach (escoamento compressível) e Froude (escoamento em canal aberto).

A equação da continuidade para escoamentos compressíveis é expressa por

$$\rho AV = \text{constante} \quad (11.160)$$

onde V é a velocidade do escoamento, ρ é a massa específica do fluido e A é a área da seção transversal do escoamento. A equação da conservação da massa nos escoamentos em canais abertos apresenta a forma

$$ybV_{ca} = \text{constante} \quad (11.161)$$

onde V_{ca} é a velocidade média do escoamento, y é a profundidade do escoamento no canal e b é a largura do canal. A análise das Eqs. 11.160 e 11.161 mostra que a massa específica do fluido, ρ , é análoga a profundidade do escoamento no canal, y , se nós considerarmos que as velocidades dos escoamentos são similares e que área A é similar a largura do canal, b .

Nós devemos ressaltar que a semelhança entre os números de Mach e de Froude normalmente não é exata. Note que a velocidade do som, c , e da onda superficial, c_{ca} , devem ser similares para que para que exista similaridade entre a velocidade do escoamento compressível e aquela no canal aberto e, também, entre os números de Mach e de Froude.

No desenvolvimento da equação da velocidade do som num gás perfeito (veja as Eqs. 11.34 e 11.35) nós mostramos que

$$c = \left[(\text{constante}) k \rho^{k-1} \right]^{1/2} \quad (11.162)$$

A análise das Eqs. 11.162 e 11.158 mostra que o valor de k deve ser igual a 2 para que exista similaridade entre y e ρ (como sugere as Eqs. 11.160 e 11.161). Normalmente $k = 1,4$ ou $1,67$ e não 2. Entretanto, essa limitação normalmente não prejudica muito os benefícios da analogia entre os escoamentos compressíveis e os escoamentos em canais abertos.

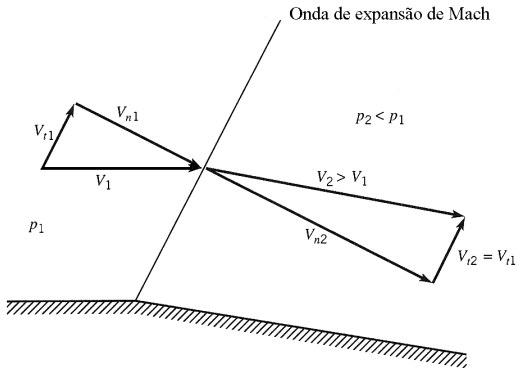


Figura 11.27 Aceleração do escoamento através de uma onda de Mach.

11.7 Escoamento Compressível Bidimensional

Nós agora apresentaremos uma breve introdução a análise dos escoamentos bidimensionais compressíveis. Nós iniciaremos nossa apresentação com a análise do escoamento supersônico sobre um canto de parede que apresenta uma leve mudança de direção (veja a Fig. 11.27).

Se aplicarmos a equação da quantidade de movimento (Eq. 5.22) na direção paralela a onda de Mach ao escoamento através da onda de Mach (veja a Eq. 11.39 para a definição da onda de Mach), nós verificaremos que a componente da velocidade paralela a onda de Mach é constante

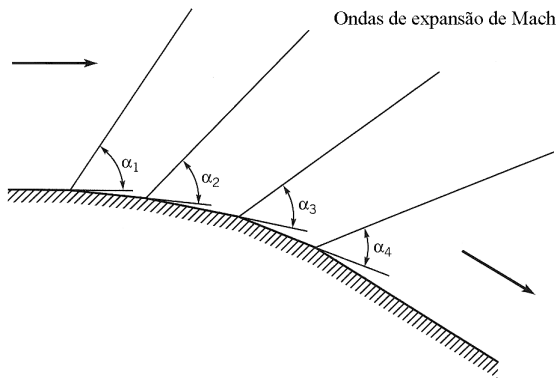


Figura 11.28 Aceleração do escoamento através das ondas de Mach.

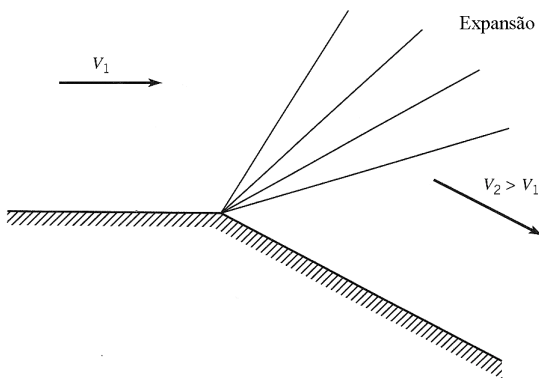


Figura 11.29 Leque de expansão.

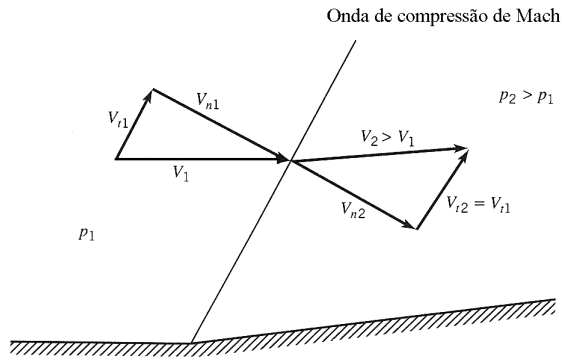


Figura 11.30 Desaceleração do escoamento através de uma onda de Mach.

através da onda de Mach, ou seja, $V_{t,1} = V_{t,2}$. Assim, a partir da construção do triângulo de velocidades indicado na Fig. 11.27, nós podemos concluir que a alteração da direção do escoamento induz uma aceleração no escoamento. Se o canto da parede apresenta várias alterações de direção (veja a Fig. 11.28), o escoamento supersônico acelera (expande) devido as mudanças na direção do escoamento provocadas pelas ondas de Mach (também conhecidas como ondas de expansão). O ângulo entre as ondas de Mach e a parede a montante da onda, α , se torna cada vez menor porque o número de Mach aumenta na direção do escoamento (veja a Sec. 11.3). Observe que um canto arredondado pode ser considerado como uma série de variações infinitesimais de direção. De outro lado, mesmo os cantos vivos são arredondados quando vistos num escala peque-

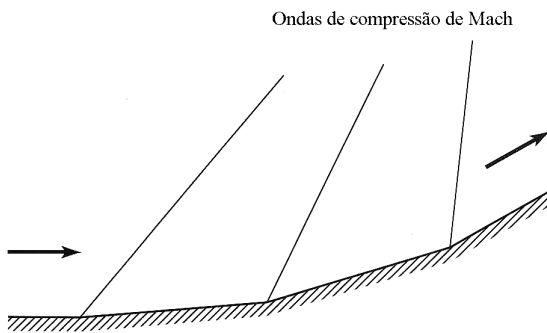


Figura 11.31 Desaceleração do escoamento através de ondas de Mach.

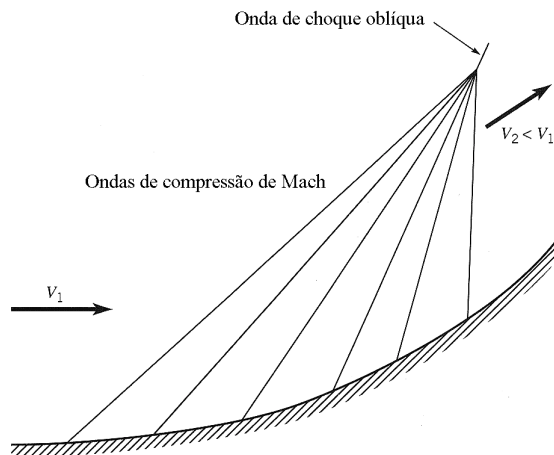


Figura 11.32 Onda de choque oblíqua.

na. Assim, o leque de expansão, como o mostrado na Fig. 11.29, é normalmente utilizado para representar o escoamento supersônico em torno de cantos vivos. Se o escoamento através das ondas de Mach for considerado isoentrópico, a Eq. 11.42 sugere que o aumento da velocidade do escoamento é acompanhado por um decréscimo de pressão estática.

Nós detectamos ondas de compressão, em vez de ondas de expansão, quando a alteração da direção do escoamento supersônico é provocada pela mudança de orientação da parede do tipo mostrada na Fig. 11.30. O escoamento desacelera e a pressão estática aumenta através do onda de Mach. Quando existem várias alterações na direção da parede, como mostra a Fig. 11.31, nós detectamos muitas ondas de Mach que apresentam ângulos α cada vez maiores. Um canto de compressão arredondado também pode ser considerado como uma série de variações infinitesimais de direção e mesmo os cantos vivos, na realidade, são arredondados. As ondas de Mach (ou ondas de compressão) podem coalescer e formar uma onda de choque oblíqua (veja a Fig. 11.32).

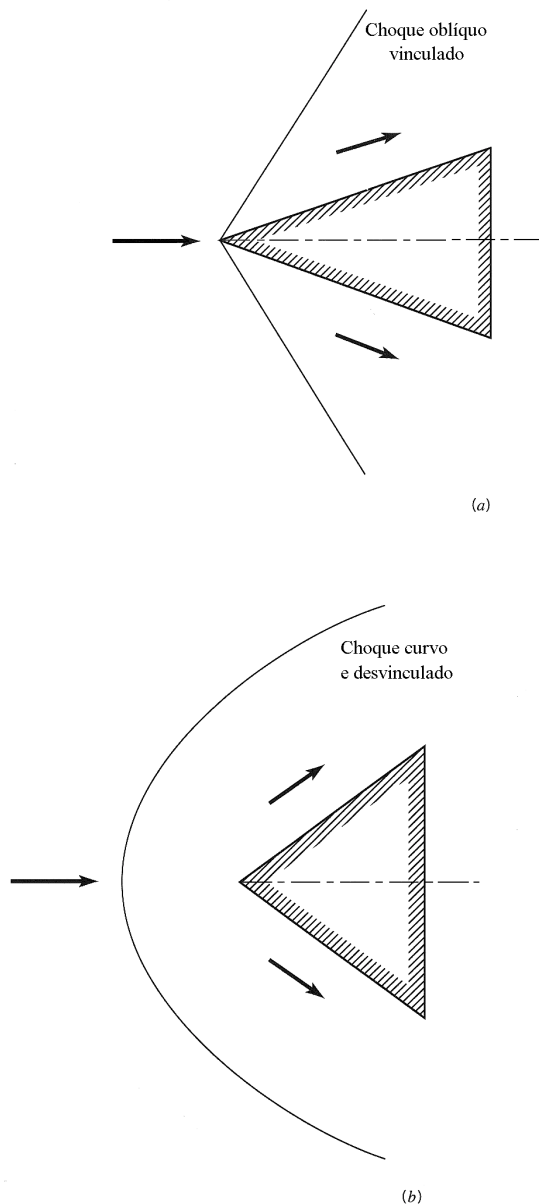


Figura 11.33 Escoamento supersônico sobre um corpo : (a) corpo afilado e onda de choque vinculada, (b) corpo rombudo e onda de choque desvinculada.

A discussão sobre ondas de compressão pode ser estendida ao escoamento supersônico incidente sobre um objeto. Por exemplo, a Fig. 11.33a mostra o escoamento supersônico incidente sobre o corpo afilado e uma onda de choque oblíqua vinculada ao objeto. A Fig. 11.33b mostra o escoamento incidente sobre um corpo mais rombudo do que o mostrado na Fig. 11.33a. Os números de Mach dos escoamentos mostrados na Fig. 11.33 são iguais mas a onda de choque associada ao corpo mais rombudo é desvinculada. Lembre que no Exemplo 11.19 nós consideramos o escoamento ao longo da trajetória de estagnação que era interceptada por uma onda de choque curva e desvinculada. Nós consideramos, naquele exemplo, que o choque curvo se comportava como uma onda de choque normal.

Esta pequena introdução aos escoamentos supersônicos bidimensionais já mostra que a análise dos escoamentos supersônicos sobre corpos e em dutos são muito interessantes (especialmente se os efeitos tridimensionais forem levados em consideração). O leitor interessado pode aprofundar seus conhecimentos consultando a literatura (por exemplo, as Refs. [6, 7, 8 e 9]).

Referências

1. Coles, D., "Channel Flow of a Compressible Fluid", Descrição resumida do filme em *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics, The NCFMF Book of Film Notes*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1972
2. Jones, J. B., Hawkins, G.A., *Engineering Thermodynamics*, Segunda Ed., Wiley, New York, 1986.
3. Moran, M. J. e Shapiro, H. N., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, Quarta Ed., Wiley, New York, 2000.
4. Keenan, J. H., Chao, J. e Kaye, J., *Gas Tables*, Segunda Ed., Wiley, New York, 1980.
5. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vol. 1, Ronald Press, New York, 1953.
6. Thompson, P. A., *Compressible – Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1972.
7. Zuchrow, M. J. e Hofman, J. D., *Gas Dynamics*, Vol. 1, Wiley, New York, 1976.
8. Saad, M. A., *Compressible Fluid Flow*, Segunda Ed., Prentice – Hall, Englewood Cliffs, 1993.
9. Anderson, J. D., Jr., *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, Segunda Ed., McGraw – Hill, New York, 1990.

Problemas

Nota: Se o valor de uma propriedade não for especificado no problema, utilize o valor fornecido na Tab. 1.5 ou 1.6 do Cap. 1. Os problemas com a indicação (*) devem ser resolvidos com uma calculadora programável ou computador. Os problemas com a indicação (+) são do tipo aberto (requerem uma análise crítica, a formulação de hipóteses e a adoção de dados). Não existe uma solução única para este tipo de problema.

11.1 O \odot 11.1 mostra que as variações de massa específica nos escoamentos podem ser visualizadas através da técnica Schlieren. Discuta como as variáveis do escoamento afetam a massa específica

do fluido que escoia e como elas atuam sobre essa propriedade.

11.2 Descreva como opera o sistema óptico para visualização de escoamentos do tipo Schlieren.

11.3 Os escoamentos mostrados no \odot 11.1 e no 11.2 são compressíveis? As velocidades destes escoamentos são altas? Justifique sua resposta.

11.4 Os aviões são proibidos de decolar quando a temperatura ambiente excede um determinado valor. Esta proibição faz sentido? Justifique sua resposta.

11.5 Ar escoia em regime permanente entre duas seções de um duto. A temperatura e a pressão na seção (1) são $T_1 = 180$ °C e $p_1 = 301$ kPa (abs). A temperatura e a pressão na seção (2) são $T_2 = 180$ °C e $p_2 = 181$ kPa (abs). Nestas condições, determine: **(a)** a variação de energia interna específica entre as seções (1) e (2), **(b)** a variação de

entalpia específica entre as seções (1) e (2), (c) variação de massa específica entre as seções (1) e (2) e (d) variação de entropia específica entre as seções (1) e (2).

11.6 Hélio é comprimido isotermicamente de 121 kPa (abs) a 301 kPa (abs) num processo. Determine a variação de entropia associada a este processo.

11.7 Ar atmosférico [21 °C e 1,03 bar (abs)] é comprimido adiabaticamente num compressor centrífugo e a pressão do ar na seção de descarga do compressor é 4,14 bar (abs). Qual é temperatura mínima do ar na seção de descarga do compressor? Justifique sua resposta.

11.8 Metano [25 °C e 100 kPa (abs)] é comprimido adiabaticamente num compressor centrífugo e a pressão do metano na seção de descarga do compressor é 200 kPa (abs). Qual é temperatura mínima do metano na seção de descarga do compressor? Justifique sua resposta.

11.9 Ar expande adiabaticamente numa turbina. A pressão e a temperatura na seção de alimentação da turbina são iguais a 5,5 bar (abs) e 890 K e a pressão na seção de descarga da turbina é 1,0 bar (abs). Se a queda de temperatura real do escoamento de ar é igual a 85% da queda de temperatura ideal, determine a temperatura do ar na seção de descarga da turbina e as variações reais de entalpia e entropia específicas associadas ao escoamento de ar na turbina.

11.10 Uma expressão para o calor específico a pressão constante do dióxido de carbono em função da temperatura é

$$c_p = 1510 - \frac{3,44 \times 10^5}{T} + \frac{4,14 \times 10^7}{T^2}$$

onde c_p está em J/(kg·K) e T em K. Compare a variação de entalpia do dióxido de carbono calculada com o valor fornecido pela Tab. 1.6 com a variação de entalpia calculada com esta equação. Admita $T_2 - T_1$ iguais a (a) 5 K, (b) 500 K e (c) 1500 K. Considere que T_1 é igual a 300 K.

11.11 A velocidade de propagação do som é maior no verão do que no inverno? Justifique sua resposta.

11.12 Estime o valor da velocidade de propagação do som num ponto situado a 76,2 km acima do nível do mar.

11.13 Determine o número de Mach associado ao movimento de um automóvel que se desloca na atmosfera padrão a (a) 40 km/h, (b) 90 km/h e (c) 160 km/h.

+ **11.14** Estime o número de Mach do escoamento de gases na seção de descarga do bocal principal do veículo lançador do “space shuttle” na decolagem (veja o 11.3).

11.15 Como é possível estimar a distância entre você e uma tempestade a partir dos raios?

11.16 Um avião moderno voa a Mach 3 numa altitude de 24000 m. Qual o valor da velocidade do avião em m/s?

11.17 Determine a velocidade do som no (a) ar, (b) dióxido de carbono, (c) hélio, (d) hidrogênio e (e) metano. Admita que a temperatura é igual a 20 °C e que os fluidos se comportam como gases perfeitos.

11.18 A fala de uma pessoa que inalou hélio fica parecida com a do “Pato Donald”. Por que isso ocorre?

11.19 Explique como você pode variar o número de Mach do escoamento em torno de uma esfera mantendo-se o número de Reynolds do escoamento constante. Admitindo que o número de Reynolds do escoamento é igual a 3×10^5 , estime qual o aumento no coeficiente de atrito verificado quando o número de Mach é aumentado de 0,3 para 1,0.

11.20 O escoamento de um gás perfeito pode ser considerado incompressível se o número de Mach é menor do que 0,3. Determine o valor da velocidade correspondente a este número de Mach admitindo que o escoamento é de (a) ar e (b) hidrogênio e que a temperatura é igual a 20 °C.

11.21 Um avião voa num plano localizado a 3050 m acima da sua cabeça. Você só escuta o ruído do avião após 8 s dele ter passado sobre sua cabeça. Admitindo que a temperatura da atmosfera é constante e igual a 4 °C, determine o número de Mach e a velocidade do avião.

11.22 O cone de Mach encontrado no escoamento sobre uma bala apresenta ângulo igual a 28°. Qual é a velocidade desta bala?

11.23 A Fig. 11.23 mostra, num determinado instante, duas ondas de pressão, que se movem com velocidade igual a do som, emitidas por uma fonte pontual que se desloca com velocidade constante num fluido em repouso. Determine o número de Mach envolvido e faça um gráfico da posição da fonte em função do tempo.

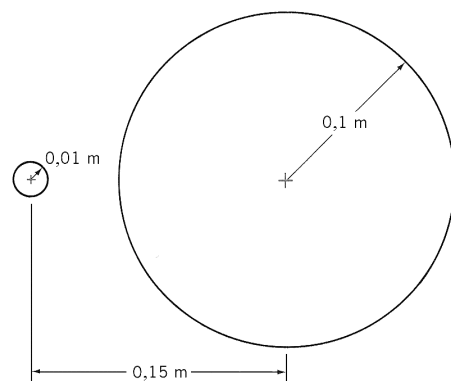


Figura P11.23

11.24 A Fig. 11.24 mostra, num determinado instante, duas ondas de pressão, que se movem com

velocidade igual a do som, emitidas por uma fonte pontual que se desloca com velocidade constante num fluido em repouso. Determine o número de Mach envolvido e faça um gráfico da posição da fonte em função do tempo.

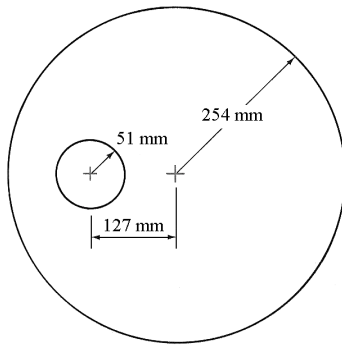


Figura P11.24

11.25 Suponha que você esteja a 182 m do local onde um explosivo foi detonado. Qual é o tempo decorrido entre a detonação e a identificação sonora da explosão? (veja o \odot 11.5).

11.26 As ondas de som são pulsos de pressão, com amplitude pequena, que se deslocam com a velocidade do som. As ondas de pressão que apresentam amplitude significativa, como as causadas pelas explosões (veja o \odot 11.5), se deslocam com um velocidade maior do que a do som? Justifique sua resposta.

11.27 Mostre que a entalpia e a temperatura de estagnação de um gás perfeito permanecem constantes ao longo de um escoamento isoentrópico. A análise da Eq. 5.69 é interessante para a solução do problema.

11.28 Explique como varia a pressão ao longo do escoamento isoentrópico de gás perfeito num duto com seção transversal variável. Admita que o escoamento é (a) subsônico e (b) supersônico.

11.29 Considere um gás perfeito. Prove que a inclinação de uma linha de pressão constante no diagrama $T - s$ é positiva e que as linhas referentes as altas pressões estão posicionadas acima das linhas referentes as baixas pressões.

11.30 Determine as razões críticas de pressão e temperatura para o (a) ar, (b) dióxido de carbono, (c) hélio, (d) hidrogênio, (e) metano, (f) nitrogênio e (g) oxigênio.

11.31 Ar escoa em regime permanente e de modo isoentrópico num duto convergente. O ar é sugado da atmosfera e é descarregado num duto receptor. A área da seção transversal da garganta do duto convergente é igual a $4,65 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Determine a vazão em massa no duto convergente se a pressão no duto receptor for igual a (a) 69,0 kPa (abs) e (b) 34,5 kPa (abs). Construa um diagrama $T - s$ para cada um dos escoamentos. Verifique seus resultados com os valores que podem ser obtidos na Fig. 11.34.

11.32 Hélio escoa em regime permanente e de modo isoentrópico num bocal convergente. O hélio é retirado de um tanque muito grande ($T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ e $p = 1,0 \text{ bar}$ (abs)) e é descarregado num duto receptor. A área da seção transversal da garganta do bocal convergente é igual a $4,65 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Determine a vazão em massa no duto convergente se a pressão no duto receptor for igual a (a) 69,0 kPa (abs) e (b) 34,5 kPa (abs). Construa um diagrama $T - s$ para cada um dos escoamentos.

11.33 Qual é a razão entre a pressão estática e a de estagnação associada as seguintes situações: (a) um corredor se deslocando a 32 km/h, (b) um ciclista correndo a 64 km/h, (c) um automóvel se deslocando a 105 km/h e (d) um avião voando a 800 km/h. Considere que o ar na atmosfera sempre se encontra na condição padrão.

11.34 Um tubo de Pitot revela que a razão entre a pressão estática e a de estagnação num certo ponto do campo de escoamento de um gás perfeito é 0,6. A temperatura de estagnação do gás é $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Determine a velocidade e o número de Mach neste local se o gás é (a) ar, (b) dióxido de carbono e (c) hidrogênio.

11.35 A pressão e a temperatura de estagnação do escoamento de ar em torno de uma sonda são iguais a 120 kPa (abs) e $100 \text{ }^\circ\text{C}$. A pressão no ar é 80 kPa (abs). Determine a velocidade do escoamento e o número de Mach considerando que o escoamento é (a) incompressível e (b) compressível.

11.36 A pressão de estagnação indicada pelo tubo de Pitot de um avião é 45 kPa (abs). Determine a velocidade e o número de Mach do avião sabendo que o voo é realizado numa altitude de 3050 m.

+ **11.37** Considere o bocal motriz principal do veículo lançador do "space shuttle". Estime a pressão de estagnação necessária na seção de alimentação do bocal para que ocorra a expansão mostrada no \odot 11.3.

11.38 Um gás ideal entra de modo subsônico e escoa isentropicamente num duto convergente – divergente que apresenta seção transversal circular. O escoamento no duto está bloqueado. A área da seção transversal do duto convergente – divergente é dada em m^2 por

$$A = 9,3 \times 10^{-3} + 0,1x^2$$

onde x é a distância medida a partir da garganta do duto em metros. Faça um desenho da vista lateral deste duto convergente – divergente e superponha as distribuições do número de Mach, da razão entre temperatura estática e de estagnação e da razão entre pressão estática e de estagnação no escoamento. A seção da alimentação do bocal está localizada em $x = -0,30 \text{ m}$ e a de descarga está posicionada em $x = +0,30 \text{ m}$. Utilize um diagrama $T - s$ para mostrar os possíveis estados em $x = -0,30 \text{ m}$, 0 m e $+0,30 \text{ m}$. Considere que o gás que escoa no duto é (a) ar e (b*) hélio (use $0,051 \leq \text{Ma} \leq 5,193$).

* **11.39** O bocal descrito no Prob. 11.38 é alimentado com hélio. O gás entra de modo supersônico e

escoa isentropicamente no duto convergente – divergente. Além disso, o escoamento está bloqueado. Faça os gráficos das distribuições do número de Mach, da razão entre temperatura estática e de estagnação e da razão entre pressão estática e de estagnação deste escoamento. Utilize um diagrama $T - s$ para mostrar os possíveis estados em $x = -0,18$ m, 0 m e $+0,18$ m. Considere que a faixa de variação do número de Mach é definida por $0,051 \leq Ma \leq 5,193$.

* **11.40** Hélio entra de modo supersônico e escoar isentropicamente no duto convergente – divergente descrito no Exemplo 11.8. O escoamento no bocal está bloqueado. Compare as variações de Ma , T/T_0 e p/p_0 do escoamento de hélio com as variações destes parâmetros referentes ao escoamento de ar no duto. Considere $0,163 \leq Ma \leq 3,221$.

* **11.41** Hélio entra de modo subsônico e escoar isentropicamente no duto convergente – divergente descrito no Exemplo 11.8. O escoamento no bocal está bloqueado. Compare as variações de Ma , T/T_0 e p/p_0 do escoamento de hélio com as variações destes parâmetros referentes ao escoamento de ar no duto. Considere $0,163 \leq Ma \leq 3,221$.

* **11.42** Hélio entra de modo subsônico e escoar isentropicamente no duto convergente divergente descrito no Exemplo 11.8. O escoamento no bocal está bloqueado. Faça os gráficos das distribuições de Ma , T/T_0 e p/p_0 do escoamento no duto de $x = -0,5$ m a $x = +0,5$ m. Admita que p/p_0 é igual a $0,99$ em $x = -0,5$ m. Construa o diagrama $T - s$ deste escoamento. Considere $0,110 \leq Ma \leq 0,430$.

11.43 Um gás perfeito entra de modo subsônico e escoar isentropicamente no duto convergente – divergente descrito no Prob. 11.38. O escoamento no duto está bloqueado. Construa os gráficos das distribuições de Ma , T/T_0 e p/p_0 do escoamento desde a seção de alimentação até a de descarga do duto. Considere que o gás que escoar no duto é (a) ar e (b*) hélio (use $0,047 \leq Ma \leq 0,722$). O valor de p/p_0 é $0,6708$ em $x = 0$ m. Construa o diagrama $T - s$ deste escoamento.

11.44 Um grande tanque contém um gás perfeito a 15°C e $1,72$ bar (abs). O gás deve ser expandido isentropicamente num bocal até a pressão atmosférica. Descreva as características do bocal que deve ser utilizado nesta aplicação e determine a área da seção de descarga do bocal se a vazão em massa desejada no dispositivo for igual a $0,45$ kg/s. Admita que o tanque contém (a) ar, (b) dióxido de carbono e (c) hélio.

11.45 Um grande tanque contém um gás perfeito a 15°C e $1,72$ bar (abs). O gás deve ser expandido isentropicamente num bocal até a pressão atmosférica. Descreva as características do bocal que deve ser utilizado nesta aplicação e determine a velocidade e o número de Mach do escoamento na seção de descarga do bocal. Admita que o tanque contém (a) ar, (b) dióxido de carbono e (c) hélio.

11.46 Um gás perfeito escoar isentropicamente num duto convergente – divergente. Uma seção transversal, localizada na região convergente do duto, apresenta $A_1 = 0,1$ m², $p_1 = 600$ kPa (abs), $T_1 = 20^\circ\text{C}$ e $Ma_1 = 0,6$. O número de Mach numa seção transversal localizada na região divergente do duto (seção 2) apresenta número de Mach igual a $3,0$. Determine os valores de A_2 , p_2 e T_2 considerando que o gás que escoar no duto é (a) ar e (b) hélio.

11.47 O escoamento isentrópico numa seção a montante da garganta de um duto convergente – divergente apresenta $V_1 = 150$ m/s, $p_1 = 100$ kPa (abs) e $T_1 = 20^\circ\text{C}$. A área da seção transversal da garganta é igual a $0,1$ m². Se o escoamento na seção de descarga do duto é supersônico, determine a vazão em massa de gás no duto. Considere que o gás que escoar no duto é (a) ar, (b) metano e (c) hélio.

11.48 A bloqueagem do escoamento associada com o uso de uma sonda intrusiva pode ser importante. Determine o aumento percentual da velocidade provocado por uma redução de $0,5\%$ na área da seção de escoamento. Admita que a área "limpa" de escoamento é igual a $1,0$ m² e que a temperatura de estagnação do escoamento é 20°C . Considere que os números de Mach na área "limpa" do escoamento são iguais a (a) $Ma = 0,2$, (b) $Ma = 0,8$, (c) $Ma = 1,5$ e (d) $Ma = 30$.

11.49 As propriedades de um gás perfeito na seção de alimentação de um tubo isolado [seção (1)] são:

$$\begin{aligned} T_0 &= 293 \text{ K} \\ p_0 &= 101 \text{ kPa (abs)} \\ Ma_1 &= 0,2 \end{aligned}$$

Admita que o escoamento no tubo pode ser modelado como um escoamento de Fanno. Determine a temperatura e a variação de entropia específica em várias seções transversais deste escoamento e construa a linha de Fanno correspondente a este problema. Considere que o gás que escoar no tubo é (a) ar e (b) hélio.

11.50 Mostre que a relação

$$\frac{dV}{V} = \frac{fk(Ma^2/2)(dx/D)}{1 - Ma^2}$$

é válida no escoamento de Fanno. Utilize esta equação para mostrar que o atrito acelera o escoamento subsônico e que o atrito desacelera o escoamento supersônico.

11.51 Um bocal convergente é alimentado, em regime permanente, com ar atmosférico [$T_0 = 15^\circ\text{C}$, $p_0 = 1,0$ bar (abs)]. O escoamento no bocal é adiabático e invíscido. O ar é descarregado do bocal num tubo que apresenta diâmetro interno e comprimento respectivamente iguais a 152 mm e $3,05$ m. O fator de atrito médio do escoamento no tubo é $0,03$. Qual é a vazão em massa máxima no tubo? Determine, para esta condição de operação, as temperaturas estática e de estagnação, as pressões estática e de estagnação e a velocidade na

seção de alimentação do tubo [seção (1)] e na seção de descarga do tubo [seção (2)]. Construa o diagrama $T-s$ deste escoamento.

11.52 Considere um escoamento de Fanno que é descarregado na atmosfera. A pressão a montante deste escoamento é aumentada até que ocorra a blocagem. O que ocorrerá com a vazão em massa do escoamento se aumentarmos ainda mais a pressão a montante do escoamento?

11.53 O tubo do Prob. 11.51 é cortado pela metade e a pressão na seção de descarga é mantida igual ao valor calculado no Prob. 11.51 (escoamento bloqueado). Determine a variação da vazão em massa associada com a redução do comprimento do tubo. O valor médio do fator de atrito do escoamento no tubo continua igual a 0,03.

11.54 Calcule o valor da pressão na seção de descarga do tubo descrito no Prob. 11.53 para que a vazão no tubo curto seja igual àquela no tubo longo (Prob. 11.51). Admita que o valor médio do fator de atrito do escoamento no tubo continua igual a 0,03.

11.55 Considere que o fator médio de atrito no escoamento no tubo descrito no Exemplo 11.12 é alterado para (a) 0,01 ou (b) 0,03 e que todas as outras condições indicadas no exemplo continuam válidas. Determine a vazão em massa máxima em cada uma destas condições e compare estes valores com aquele indicado no exemplo.

11.56 Considere que o comprimento do tubo descrito no Exemplo 11.12 é alterado para (a) 1 m ou (b) 3 m e que todas as outras condições indicadas no exemplo continuam válidas. Determine a vazão em massa máxima em cada um destes dutos e compare estes valores com aquele indicado no exemplo.

11.57 O comprimento do tubo descrito no Exemplo 11.12 é aumentado em 50%. Determine a vazão em massa de ar no tubo alongado sabendo que a pressão na seção de descarga do tubo é igual a 46,2 kPa (abs). Admita que o fator médio de atrito do escoamento no tubo continua igual a 0,02.

11.58 Um gás perfeito escoou de modo adiabático e com atrito num tubo longo. As condições operacionais na seção de alimentação do tubo [seção (1)] são $p_1 = 60$ kPa (abs), $T_1 = 60$ °C e $V_1 = 200$ m/s. A pressão na seção de descarga [seção (2)] é $T_2 = 30$ °C. Determine p_2 , V_2 e a razão entre as pressões de estagnação $p_{0,2}/p_{0,1}$ se o gás que escoou no tubo é (a) ar e (b) hélio.

11.59 Reconsidere o Prob. 11.58. Determine os valores de T , p e V na seção transversal do escoamento localizada na metade do tubo.

11.60 Um gás perfeito escoou de modo adiabático num tubo longo. As condições operacionais na seção de alimentação do tubo [seção (1)] são $p_{0,1} = 6,9$ bar (abs), $T_{0,1} = 333$ K e $Ma_1 = 0,5$. O escoamento está bloqueado na seção de descarga do tubo [seção (2)]. Determine o módulo da força por

unidade de área da seção transversal do tubo que atua no fluido se o gás que escoou no tubo é (a) ar e (b) hélio.

11.61 Um gás perfeito escoou de modo invíscido num tubo. As propriedades do escoamento na seção de alimentação do tubo [seção (1)] são

$$\begin{aligned} T_0 &= 293 \text{ K} \\ p_0 &= 101 \text{ kPa (abs)} \\ Ma_1 &= 0,2 \end{aligned}$$

Admita que o escoamento se comporta como um de Rayleigh. Determine os valores da temperatura e das variações de entropia específica em várias seções do escoamento e construa a linha de Rayleigh. Considere que o gás que escoou no tubo é (a) ar e (b) hélio.

11.62 Um bocal convergente é alimentado com ar proveniente da atmosfera [$T_0 = 288$ K e $p_0 = 101$ kPa (abs)]. O escoamento no bocal é isoentrópico e o regime de operação é o permanente. O ar é descarregado do bocal num tubo onde são transferidos 500 kJ/kg de calor ao fluido. O escoamento no tubo pode ser modelado como invíscido. Considere a condição de operação referente a vazão máxima no arranjo. Determine os valores das temperaturas estática e de estagnação, das pressões estática e de estagnação e da velocidade do escoamento nas seções de alimentação e descarga do tubo. Construa o diagrama $T-s$ deste escoamento.

11.63 O escoamento de um gás perfeito na seção de alimentação [seção (1)] de um tubo (diâmetro interno = 152 mm) apresenta as seguintes características: $p_1 = 1,38$ bar (abs), $T_1 = 27$ °C e $V_1 = 61,0$ m/s. O escoamento de gás no tubo pode ser modelado como invíscido. Determine a transferência de calor para o fluido necessária para que a temperatura na seção de descarga do tubo [seção (2)] seja igual a 816 °C. Determine, também, p_2 , V_2 e Ma_2 . Considere os escoamentos de (a) ar e (b) hélio.

11.64 O escoamento de ar na seção de alimentação [seção (1)] de um tubo apresenta as seguintes características: $p_1 = 200$ kPa (abs), $T_1 = 500$ K e $V_1 = 400$ m/s. O escoamento de ar no tubo pode ser modelado como invíscido. A transferência de calor do fluido para o ambiente é igual a 500 kJ/kg. Determine a temperatura estática, a pressão estática e a velocidade do escoamento na seção de descarga do tubo [seção (2)]. Construa o diagrama $T-s$ deste escoamento.

11.65 O escoamento de ar na seção de alimentação [seção (1)] de um tubo apresenta as seguintes características: $p_1 = 103$ kPa (abs), $T_1 = 294$ K e $V_1 = 61,0$ m/s. O escoamento de ar na seção de descarga do tubo [seção (2)] apresenta $p_2 = 69,0$ kPa e $T_2 = 978$ K. Determine as razões entre as temperaturas e pressões de estagnação, $T_{0,2}/T_{0,1}$ e $p_{0,2}/p_{0,1}$, e a transferência de calor no escoamento por quilograma de fluido que escoou no tubo. Este

escoamento pode ser modelado como invíscido? Justifique sua resposta.

11.66 O número de Mach e a pressão de estagnação logo a montante de um choque normal são iguais a 2,0 e 200 kPa (abs). Determine a queda de pressão de estagnação provocada pelo choque para escoamentos de **(a)** ar e **(b)** hélio. Admita que estes gases se comportam como gases perfeitos. Analise o efeito da variação de k sobre a perda de pressão de estagnação provocada pelo choque.

11.67 A razão entre as pressões de estagnação através de um choque normal num escoamento de ar é igual a 0,8. Determine o número de Mach logo a montante do choque. Admita que o ar se comporta como um gás perfeito.

11.68 As condições de um escoamento logo a montante de um choque normal são: $Ma = 3,0$, $T = 333$ K e $p = 2,1$ bar (abs). Determine os valores de Ma , T_0 , T , p_0 , p e V logo a jusante do choque. Considere que o fluido que escoar é **(a)** ar e **(b)** hélio.

11.69 Uma sonda de pressão total, parecida com a mostrada no Exemplo 3.4, é inserida num escoamento supersônico de ar e detectou-se uma onda de choque na vizinhança do orifício de medida da pressão total. A sonda mede uma pressão total de 500 kPa (abs) e a temperatura de estagnação na cabeça da sonda é 500 K. A pressão estática a montante do choque é igual a 100 kPa (abs). Nestas condições, determine o número de Mach e a velocidade do escoamento.

11.70 O tubo de Pitot de um avião supersônico que voa numa altitude de 9150 m indica uma pressão de estagnação de 82,7 kPa (abs). Determine a velocidade do escoamento de ar em torno do avião e o número de Mach associado a este vôo. Admita que a atmosfera se comporta como a padrão americana e que existe uma onda de choque na vizinhança da cabeça do tubo de Pitot.

11.71 Um avião voa a Mach 2,0 numa altitude de 15 km. O ar que alimenta a turbina é desacelerado até Mach 0,4 na seção de alimentação do compressor da turbina. Um choque normal ocorre a montante desta seção de alimentação e num local onde o número de Mach é igual a 1,2. Determine a temperatura e a pressão de estagnação do ar que alimenta o compressor. Admita que o escoamento, exceto na região do choque, é isoentrópico e que a atmosfera se comporta como a americana padrão.

11.72 Determine, para o escoamento de ar no duto descrito no Exemplo 11.8, a razão entre a pressão na seção de descarga do duto e a pressão de estagnação na seção de alimentação do duto que proporciona uma onda de choque normal e estacionária em **(a)** $x = +0,1$ m, **(b)** $x = +0,2$ m e **(c)** $x = +0,4$ m. Determine, também, a perda de pressão de estagnação provocada por cada um destes choques normais.

11.73 Um choque normal está posicionado na região divergente de um bocal convergente –

divergente. O escoamento no bocal é adiabático e invíscido a montante e a jusante do choque. A área da seção transversal onde o choque ocorre é igual a $9,3 \times 10^{-3}$ m² e o número de Mach local, nesta seção, é 2,0. O escoamento a montante do choque apresenta $p_0 = 13,8$ bar (abs) e $T_0 = 667$ K. Sabendo que a área da seção de descarga do bocal é $1,40 \times 10^{-2}$ m², determine a temperatura e a pressão na seção de descarga do bocal e a vazão em massa no bocal.

11.74 Um tubo, comprimento = 9,14 m e diâmetro interno = 305 mm, é alimentado com um escoamento supersônico de ar. O número de Mach do escoamento na seção de alimentação do tubo [seção (1)] é $Ma_1 = 3,0$. O escoamento no tubo é adiabático e o fator de atrito do escoamento no tubo é 0,02. Determine a razão entre a pressão na seção de descarga do tubo e a pressão de estagnação na seção de alimentação do tubo sabendo que existe uma onda de choque posicionada a **(a)** 1,52 m ou **(b)** 3,05 m da seção de alimentação do tubo. Determine, também, os números de Mach na seção de descarga do tubo e construa um diagrama $T - s$ para cada um dos escoamentos.

11.75 Um tubo, diâmetro interno = 100 mm, é alimentado com um escoamento supersônico de um gás perfeito. O número de Mach do escoamento na seção de alimentação do tubo [seção (1)] é $Ma_1 = 2,0$. O escoamento no tubo é adiabático e o fator de atrito do escoamento no tubo é 0,02. Determine o comprimento do tubo sabendo que existe uma onda de choque normal na seção de descarga do tubo e que o número de Mach logo a montante do choque é igual a 1,2. Considere um escoamento de **(a)** ar e outro de **(b)** hélio.

11.76 O escoamento de ar na seção de alimentação [seção (1)] de um tubo apresenta as seguintes características: $p_{0,1} = 103$ kPa (abs), $T_{0,1} = 15$ °C e $Ma_1 = 2,0$. O escoamento de ar é desacelerado por um aquecimento do fluido até a seção do escoamento que apresenta $Ma = 1,5$ onde se detecta uma onda de choque normal. A jusante deste choque normal, o escoamento subsônico é acelerado por uma transferência de calor até a seção de descarga do tubo (onde o escoamento bloca). Admita que o escoamento de ar pode ser modelado como invíscido. Determine as temperaturas estática e de estagnação, as pressões estática e de estagnação e a velocidade do escoamento na seção de alimentação do tubo, logo a montante e logo a jusante do choque normal e na seção de descarga do tubo. Construa o diagrama $T - s$ associado a este escoamento.

11.77 O escoamento de um gás perfeito na seção de alimentação [seção (1)] de um tubo apresenta as seguintes características: $p_0 = 101$ kPa (abs), $T_0 = 20$ °C e $Ma_1 = 2,5$. O escoamento de gás é desacelerado por um aquecimento do fluido até a seção do escoamento que apresenta $Ma = 1,3$ onde se detecta uma onda de choque normal. A jusante deste choque normal, o escoamento subsônico é

acelerado por uma transferência de calor até a seção de descarga do tubo (onde $Ma = 0,9$). Admita que o escoamento de ar pode ser modelado como invíscido. Determine as temperaturas estática e de estagnação, as pressões estática e de estagnação e a velocidade do escoamento na seção de alimentação do tubo, logo a montante e logo a jusante do choque normal e na seção de descarga do tubo. Construa o diagrama $T - s$ associado a este escoamento. Considere os escoamentos de (a) ar e (b) hélio.

11.78 Apresente e discuta as similaridades que existem entre os ressaltos hidráulicos, que ocorrem em canais abertos, e as ondas de choque que podem ser encontradas nos escoamentos supersônicos.

+ **11.79** Estime o número de Mach associado com a reentrada do ônibus espacial na atmosfera da Terra. Estime, também, a temperatura da superfície do veículo nesta manobra. Faça uma lista com todas as hipóteses utilizadas na solução do problema.

+ **11.80** Estime a temperatura máxima desenvolvida no bordo de ataque de um avião de caça supersônico. Faça uma lista com todas as hipóteses utilizadas na solução do problema.

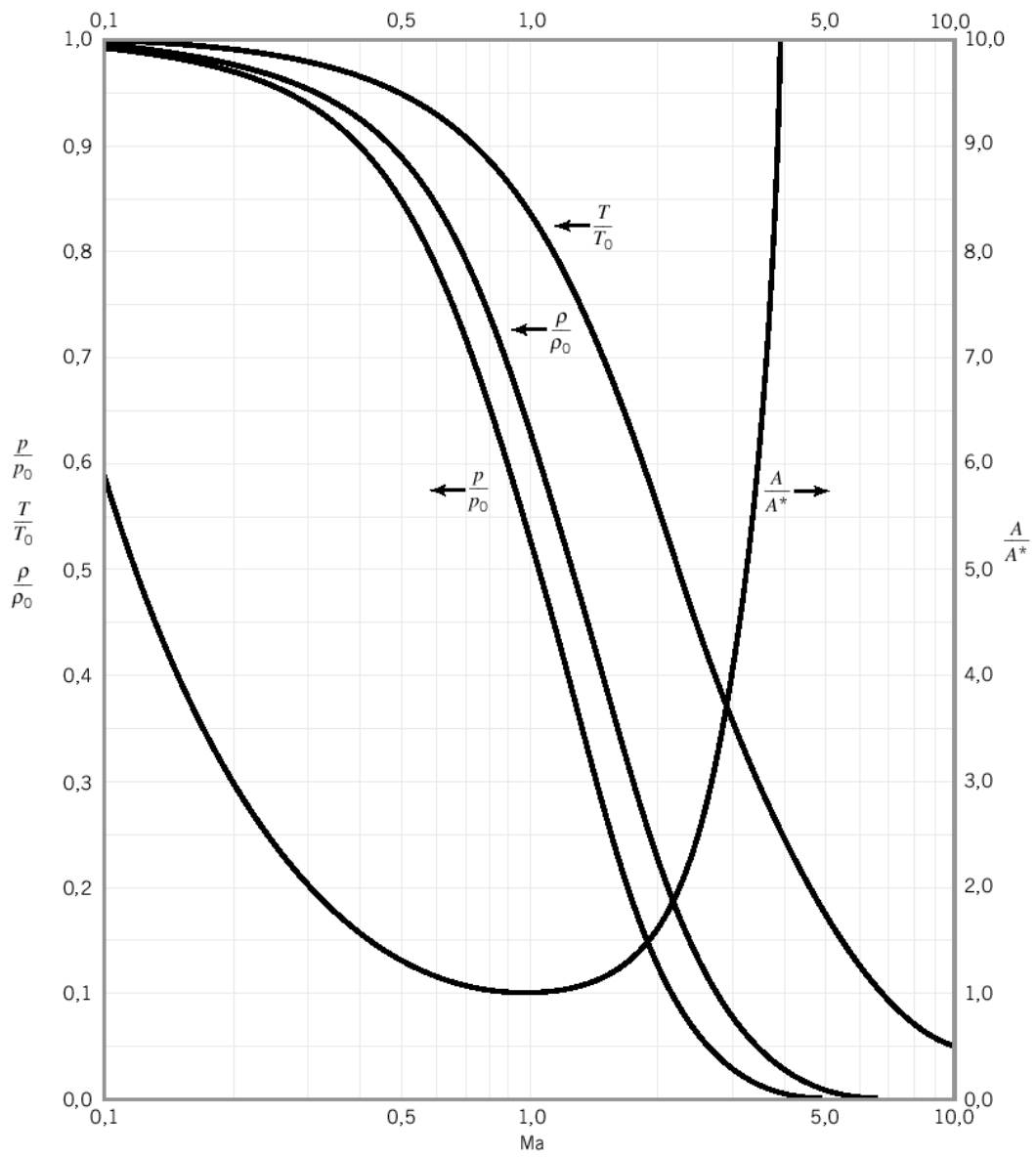


Figura 11.34 Escoamento isentrópico para um gás perfeito que apresenta $k = 1,4$. (Gráfico fornecido pelo Prof. Bruce A. Reichert, Universidade Estadual do Kansas).

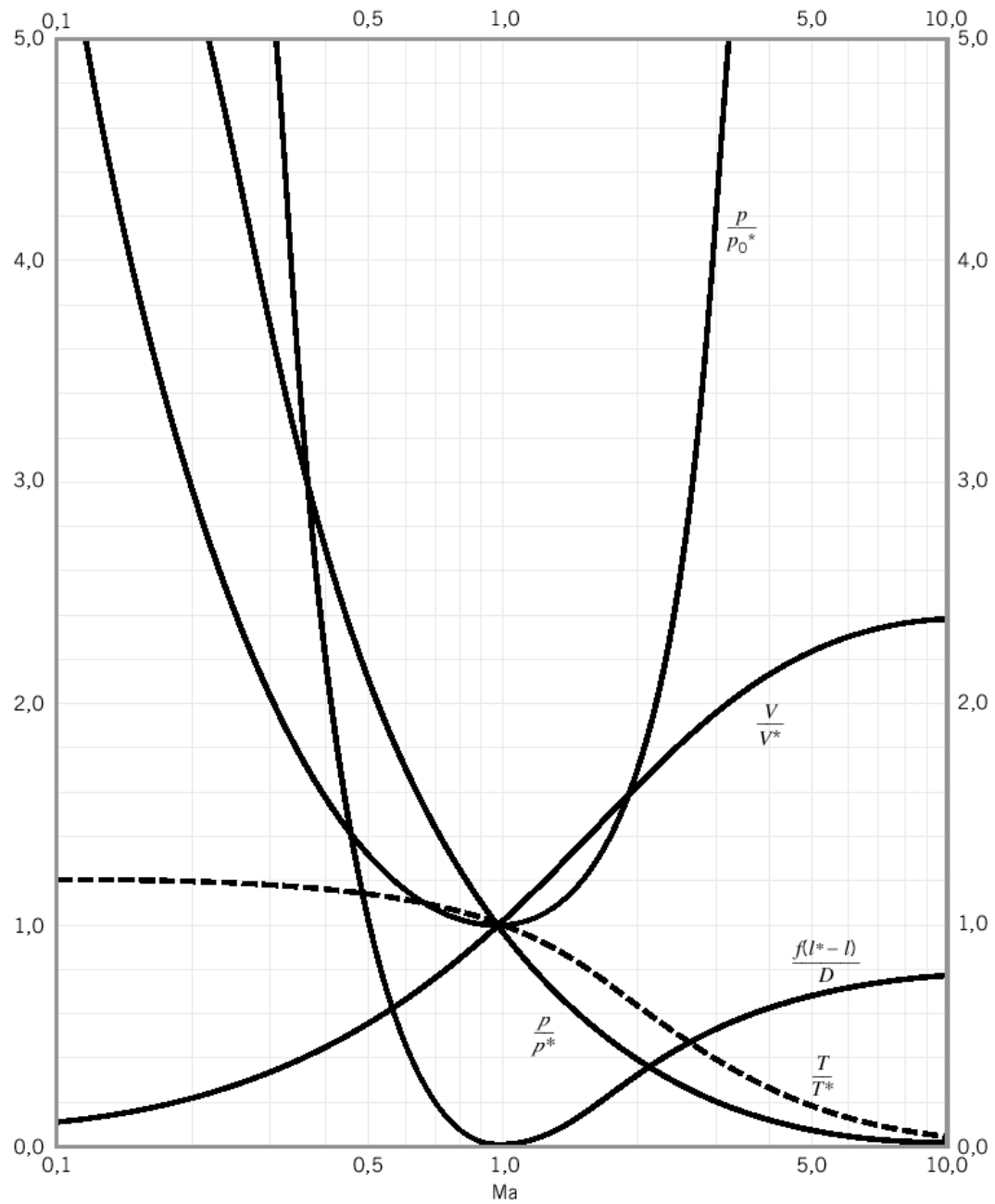


Figura 11.35 Escoamento de Fanno para um gás perfeito que apresenta $k = 1,4$. (Gráfico fornecido pelo Prof. Bruce A. Reichert, Universidade Estadual do Kansas).

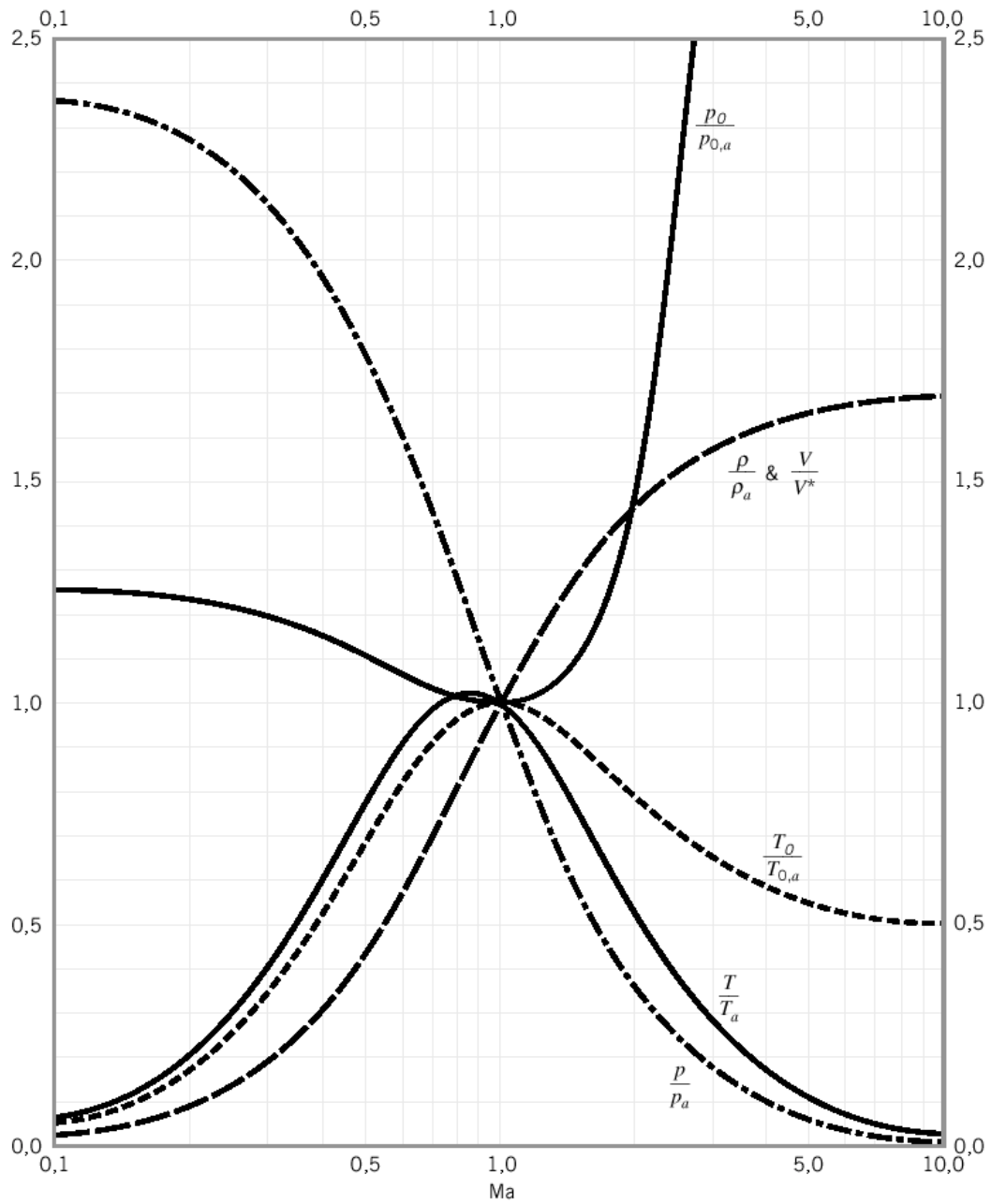


Figura 11.36 Escoamento de Rayleigh para um gás perfeito que apresenta $k = 1,4$. (Gráfico fornecido pelo Prof. Bruce A. Reichert, Universidade Estadual do Kansas).

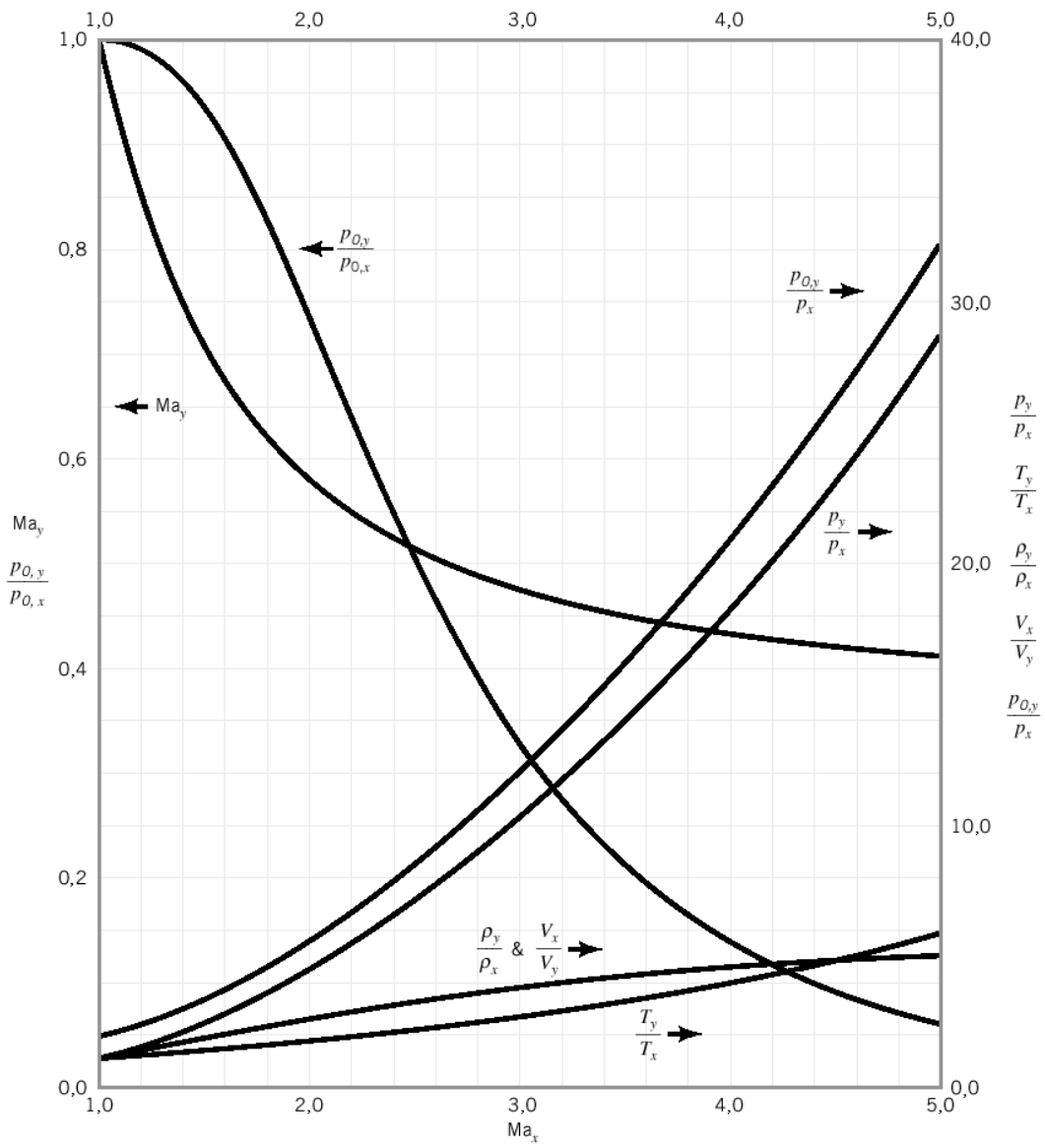


Figura 11.37 Choque normal para um gás perfeito que apresenta $k = 1,4$. (Gráfico fornecido pelo Prof. Bruce A. Reichert, Universidade Estadual do Kansas).