Exercícios propostos resolvidos

Capítulo 9 – Função Logarítmica

P 9.1

a) $\log 100 = \log_{10} 100 = x \leftrightarrow 10^x = 100 \leftrightarrow 10^x = 10^2 \leftrightarrow x = 2$

b) $\log_{1/3} 81 = x \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \leftrightarrow (3^{-1})^x = 3^4 \leftrightarrow -x = 4 \leftrightarrow x = -4$

c) $\operatorname{colog}_2 4 = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = x \leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \leftrightarrow x = -2$

d) $\operatorname{colog}_2 8 = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x \leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3} \leftrightarrow x = -3$

e) $\log_{\sqrt[3]{16}} \sqrt{32} = x \leftrightarrow \left(\sqrt[3]{16}\right)^x = \sqrt{32} \leftrightarrow \left(16^{1/3}\right)^x = 32^{1/2} \leftrightarrow \left(2^{4/3}\right)^x = 2^{5/2} \leftrightarrow$
$\frac{4x}{3} = \frac{5}{2} \leftrightarrow 8x = 15 \leftrightarrow x = \frac{15}{8}$

f) $2^{3+\log_2 7} = 2^3 \times 2^{\log_2 7} = 8 \times 7 = 56$

P 9.2

$$(\log_a b).(\log_{19} a).(\log_a 19) = 2.(\log_{19} a).(\log_a 19) = 2.(\log_{19} a).\left(\frac{\log_{19} 19}{\log_{19} a}\right) =$$

$$= 2.\log_{19} a\,.\left(\frac{1}{\log_{19} a}\right) = 2$$

P 9.3

$$\log_3 b - \log_3 a = \log_3 \frac{b}{a} = 4 \leftrightarrow 3^4 = \frac{b}{a} \leftrightarrow \frac{b}{a} = 81$$

P 9.4

Para que a função $f(x)$ exista, devemos ter:

$$\log_{1/2} x \geq 0 \leftrightarrow \log_{1/2} x \geq \log_{1/2} 1$$

Como a base é 1/2, ou seja, menor que 1, a função é decrescente, devemos inverter a desigualdade, sempre lembrando que o logaritmando deve ser positivo, então:

$$0 < x \leq 1$$

Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq 1\}$

P 9.5

Vamos chamar $\log_{10} x = y$, então reescrevendo a equação acima:

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Resolvendo a equação em y, usando a fórmula de Bháskara, temos que $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$. Voltamos à igualdade anterior e temos duas novas equações logarítmicas do 2º tipo:

- $\log_{10} x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$
- $\log_{10} x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$

Resposta: S = {10; 100}

P 9.6

$$\log_3(x^2 - 1) = \log_3(x + 1) \rightarrow x^2 - 1 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, temos que:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times -2}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Como na condição de existência do logaritmo, o valor de *x* deve ser positivo, *x* = 2;

Resposta: S = {2}

P 9.7

Como a base é 1/3, ou seja, menor que 1, a função é decrescente, devemos inverter a desigualdade, sempre lembrando que o logaritmando deve ser positivo, então:

$x^2 - 4x + 3 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 3 \Rightarrow x^2 - 4x > 0$ .Neste caso, devemos estudar o sinal desta inequação:

Determinando as raízes: $x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$. Como a função do 2º grau tem como gráfico uma parábola de concavidade para cima, a função é positiva fora das raízes, ou seja, nos intervalos]-∞,0[∪]4,∞ [.

Resposta: S = { $x \in \mathbb{R}$ / $x < 0 \vee x > 4$}

P 9.8

Como a base é 5, ou seja, maior que 1, a função é crescente, podemos comparar os logaritmando, mantendo a desigualdade, mas devemos lembrar que o logaritmando deve ser positivo, então:

$0 < x^2 - 3x \leq 18$. Neste caso, devemos separar em dois casos esta inequação:

- $x^2 - 3x > 0$
  Determinando as raízes: $x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$. Como a função do 2º grau tem com gráfico uma parábola de concavidade para cima, a função é positiva fora das raízes, ou seja, nos intervalos $]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$.
- $x^2 - 3x \leq 18$
  Reescrevendo a inequação: $x^2 - 3x - 18 \leq 0$, vamos determinar as raízes da equação $x^2 - 3x - 18 = 0$, que aplicando a fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times -18}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

  Como a função do 2º grau tem como gráfico uma parábola de concavidade para cima, a função é negativa dentro das raízes, ou seja, no intervalo $]-3, 6[$.

Fazendo a interseção entre as soluções acima, temos o conjunto solução.

Resposta: S = { $x \in \mathbb{R}$ / $-3 \leq x < 0 \ \vee\ 3 < x \leq 6$}

P 9.9

Para que a função $f(x)$ exista, devemos ter:

$$\log x \geq 0 \leftrightarrow \log_{10} x \geq \log_{10} 1$$

Como a base é 10, ou seja, maior que 1, a função é crescente, devemos manter a desigualdade, então:

$$x \geq 1$$

Resposta: D(f) = {$x \in \mathbb{R}$ / $x \geq 1$} = [1; ∞[

P 9.10

Resolução: Observe que:

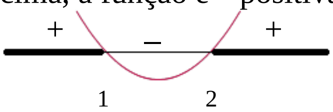
$$\log(x^2 - 3x + 2) - \log(1 - x^2) = \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}\right)$$

Pela condição de existência do logaritmo, devemos ter o logaritmando positivo, ou seja, devemos resolver a inequação:

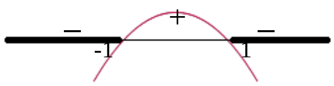
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} > 0$$

Estudando o sinal de cada função separadamente, temos:

- $x^2 - 3x + 2$, aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes, temos $x = 1$ ou $x = 2$. Como a função do 2º grau tem com gráfico uma parábola de concavidade para cima, a função é positiva fora das raízes e negativa dentro das raízes.



- $1 - x^2$, aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes, temos $x = -1$ ou $x = 1$. Como a função do 2º grau tem com gráfico uma parábola de concavidade para baixo, a função é negativa fora das raízes e positiva dentro das raízes.



Fazendo o quadro de sinais:

-1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2

$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	–	+
$1 - x^2$	–	+	+	–	–
quociente	–	+	+	+	–

Resposta: D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 < x < 2\}$