Exercícios propostos resolvidos

Capítulo 8 – Função Exponencial

P 8.1

a) Fatorando o 25:
$5^{4x-3} = 5^2$, igualando os expoentes: $4x - 3 = 2 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

b) Fatorando o 343:
$7^{2-3x} = 7^3$, igualando os expoentes: $2 - 3x = 3 \Rightarrow -3x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

P 8.2

a) Vamos chamar $y = 2^x$, então $y^2 = 2^{2x} = 4^x$. Substituindo na equação:
$y^2 - 6y + 8 = 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara:

$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} y' = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ y" = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Voltando à substituição:
$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
$2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$

Resposta: S = {1; 2}

b) Vamos chamar $y = 3^x$, então $y^2 = 3^{2x} = 9^x$. Substituindo na equação:
$y^2 - 2y - 3 = 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara:

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} y' = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y" = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Voltando à substituição:
Para $y' = 3, 3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$
Para $y" = -1, 3^x = -1 \notin \mathbb{R}$

Resposta: S = {1}

P 8.3

a)
$2^{3x-1} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{3x-1} \leq 2^{-3}$, como a base a >1, a desigualdade se mantém:
$3x - 1 \leq -3 \Rightarrow 3x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$
S = {x ∈ ℝ/ $x \leq -\frac{2}{3}$}

b)
$3^{5-2x} > 243 \Rightarrow 3^{5-2x} > 3^5$, como a base a >1, a desigualdade se mantém:
$5 - 2x > 5 \Rightarrow -2x > 0$, multiplicando a desigualdade por (-1): $x < 0$.
S = {x ∈ ℝ/ $x < 0$}

P 8.4

a)
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} \geq 22 \Rightarrow 2^x + 2.2^x + 2^3.2^x \geq 22$, vamos chamar $y = 2^x$,então:
$y + 2y + 8y \geq 22 \Rightarrow 11y \geq 22 \Rightarrow y \geq 2$. Voltando à substituição:
$2^x \geq 2$, , como a base a >1, a desigualdade se mantém:
$2^x \geq 2^1 \Rightarrow x \geq 1$.
S = {x ∈ ℝ/ $x \geq 1$}.

b)
Vamos chamar $y = 5^x$, então $y^2 = 5^{2x} = 25^x$. Substituindo na inequação:
$y^2 - 3y - 10 > 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara para encontrar as raízes de $y^2 - 3y - 10 = 0$, temos:

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-10)}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} y' = \dfrac{3+7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ y'' = \dfrac{3-7}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Voltando à substituição:

$$5^x > 5 \rightarrow x > 1$$

$5^x > -2$ → vale para todos os reais.
S = {x ∈ ℝ/ $x > 1$}