Exercícios propostos resolvidos

Capítulo 13 – Roteiro de aula e estudo com exercícios resolvidos e exercícios propostos

Capítulo 1 – Noções de conjuntos

P 13.3

a) (F), pois $1 \notin B$ e $3 \notin B$
b) (V), pois 2, 4 e $6 \in C$
c) (F), pois 4, 5, 6 e $7 \notin A$
d) (F), pois $1, 2, 3 \in C \Rightarrow A \subset C$
e) (V), pois $4, 5, 6, 7 \in C$ $4, 5, 6, 7 \notin A$
f) (V), pois os elementos de B não são elementos de A

P 13.5

a) (V), pois r é um elemento de M e M é conjunto
b) (F), pois r é elemento e M é conjunto
c) (F), pois {r} não é elemento do conjunto M
d) (V), pois {r} é um subconjunto de M

P 13.7

a) $A \cup B = \{a, b, d, e\}$;
b) $B \cap A = \{b, d\}$;
c) $B' = U - B = \{a, c\}$;
d) $B - A = \{e\}$;
e) $A' \cap B = (U - A) \cap B = \{c, e\} \cap \{b, d, e\} = \{e\}$;
f) $A \cup B' = \{a, b, d\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c, d\}$;
g) $A' \cap B' = \{c, e\} \cap \{a, c\} = \{c\}$;
h) $B' - A' = \{a, c\} - \{c, e\} = \{a\}$;
i) $(A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{a, b, c, d, e\} - \{b, d\} = \{a, c, e\}$
j) $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{a, b, c, d, e\} - \{a, b, d, e\} = \{c\}$

P 13.9

$$x \in (B - A') \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A' \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in B \cap A$$

Donde conclui-se que,

$$B - A' = B \cap A$$

P 13.13

$n(A) = 15$
$n(B) = 12$
$n(A \cap B) = 5$

Pela fórmula, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = 15 + 12 - 5 = 22$$

Resposta: $n(A \cup B) = 22$ elementos

Capítulo 2 – Conjuntos numéricos

P 13.15

a) Seja a dízima g $=0,\overline{23}$ (1)
Fazemos: $100g = 100 \times 0,\overline{23} \quad \Rightarrow \quad 100g = 23,\overline{23}$ (2)
Subtraindo membro a membro (1) de (2), temos:
$100g - g = 23,\overline{23} - 0,\overline{23}$
$99g = 23 \Rightarrow g = \frac{23}{99}$

b) Seja a dízima g $=2,4\overline{\dot{1}2}$ (1)
Fazemos: $1000g = 1000 \times 2,4\overline{\dot{1}2} \quad \Rightarrow \quad 1000g = 2412,\overline{12}$ (2)
$10g = 10 \times 2,4\overline{\dot{1}2} \quad \Rightarrow \quad 10g = 24,\overline{12}$ (3)
Subtraindo membro a membro (2) de (3), temos:
$1000g - 10g = 2412,\overline{12} - 24,\overline{12}$
$990g = 2388 \Rightarrow g = \frac{2388}{990} = 2\frac{408}{990}$

P 13.18

(1) Suponhamos por absurdo que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, isto é, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, para $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.
(2) Vamos supor, ainda, que $\frac{a}{b}$ seja fração irredutível, ou seja, mdc(a, b) = 1.
Elevando ao quadrado ambos os membros de (1), temos:

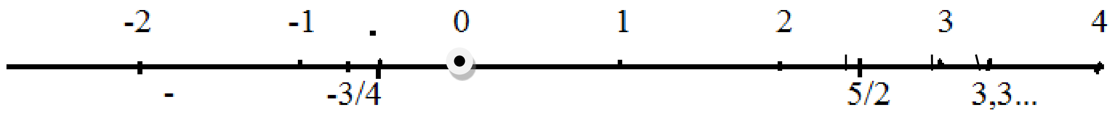
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3.b^2 \quad (3)$$

Temos que a^2 é múltiplo de 3, logo, a é múltiplo de 3, ou seja, existe um k$\in \mathbb{Z}$ tal que $a = 3k$, substituindo em (3):
$(3k)^2 = 3.b^2 \Rightarrow 9k^2 = 3.b^2$(dividindo a equação por 3)

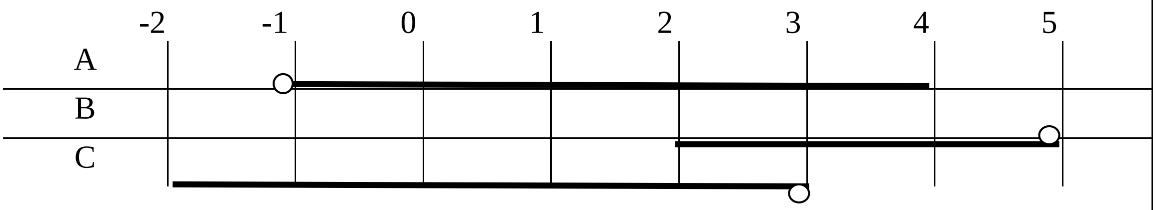
$3k^2 = b^2$ o que implica que b^2é múltiplo de 3. Novamente, concluímos que b é múltiplo de 3. Então a e b são múltiplos de 3 e, neste caso, a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, o que contraria a hipótese (2). Logo, $\sqrt{3}$ é um número irracional.

P 13.20

a) $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$;
d) $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$;
e) $3,\overline{3} = 3 + \frac{3}{9} = 3 + \frac{1}{3}$.



P 13.22



(A ∩ B) = [2; 4] → (A ∩ B) – C = [2; 4] – [-2; 3[= [3; 4]

Resposta: (A ∩ B) – C = [3; 4]

Capítulo 3 – Potenciação, radiciação e produtos notáveis

P 13.24

a) $2+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{6}\right)=2+\left(\frac{4+5}{20}\right):\left(\frac{6-1}{6}\right)=2+\frac{9}{20}:\frac{5}{6}=2+\frac{9}{20}\times\frac{6}{5}=2+\frac{27}{50}=\frac{127}{50}$

b) $\left(1\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{10}{3}\right)\times\left(\frac{5+1}{5}\right)=\left(\frac{9+20}{6}\right)\times\frac{6}{5}=\frac{29}{5}$

c) $\left(1-\frac{2}{3}\right)^3:\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{3-2}{3}\right)^3:\frac{1}{9}+\left(\frac{3+2}{6}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{9}{1}+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{27}\times\frac{9}{1}+\frac{25}{36}$

$$=\frac{1}{3}+\frac{25}{36}=\frac{12+25}{36}=\frac{37}{36}$$

P 13.26

a) $(3.2)^{-1}\times(3^{-1}+2^{-1})^{-1}=6^{-1}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2+3}{6}\right)^{-1}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$

b) $\frac{2^{-2}+4^{-2}}{2^{-1}+4^{-1}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{4+1}{16}}{\frac{2+1}{4}}=\frac{5}{16}\times\frac{4}{3}=\frac{5}{12}$

c) $(0{,}4)^2+2.(1{,}2)^2=0{,}16+2.(1{,}44)=0{,}16+2{,}88=3{,}04$

P 13.28

a) $(9-7{,}5)^2=(1{,}5)^2=2{,}25$

b) $(2^2-2^{-2})^2=\left(4-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{16-1}{4}\right)^2=\left(\frac{15}{4}\right)^2=\frac{225}{16}=14\frac{1}{16}$

c) $\frac{10^2\times(0{,}2)^3}{(0{,}4)^2}=\frac{100\times0{,}008}{0{,}16}=\frac{0{,}8}{0{,}16}=5$

P 13.30

a) $\frac{2x}{\sqrt{2x-x}}=\frac{2x}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{2x\sqrt{x}}{x}=2\sqrt{x}$

b) $\frac{5m}{\sqrt{7m}+\sqrt{2m}}+\frac{2m}{\sqrt{2m}}=\frac{5m(\sqrt{7m}-\sqrt{2m})}{(\sqrt{7m}+\sqrt{2m})(\sqrt{7m}-\sqrt{2m})}+\frac{2m\sqrt{2m}}{\sqrt{2m}.\sqrt{2m}}=\frac{5m(\sqrt{7m}-\sqrt{2m})}{7m-2m}+\frac{2m\sqrt{2m}}{2m}=$
$\frac{5m(\sqrt{7m}-\sqrt{2m})}{5m}+\sqrt{2m}=\sqrt{7m}-\sqrt{2m}+\sqrt{2m}=\sqrt{7m}$

P 13.32

$a)\ 3x+\frac{2-5x}{6}=6+\frac{4x-1}{5}$, multiplicando a igualdade por 30:

$$90x+5(2-5x)=180+6(4x-1)$$
$$90x+10-25x=180+24x-6$$
$$90x-25x-24x=180-6-10$$
$$41x=164$$
$$x=4$$

Resposta: S ={4}

b) $\frac{2}{3}\left(3x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)$, multiplicando a igualdade por 6:

$$4\left(3x-\frac{1}{2}\right)=9\left(x-\frac{1}{3}\right)$$
$$12x-2=9x-3$$
$$12x-9x=-3+2$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$

Resposta: S = {$\frac{-1}{3}$}

P 13.34

$a)$ $\frac{x}{3}-\frac{3-x}{2}\leq\frac{x-1}{3}-\frac{4x-3}{6}$, multiplicando a desigualdade por 6:

$$2x-3(3-x)\leq 2(x-1)-(4x-3)$$
$$2x-9+3x\leq 2x-2-4x+3$$
$$2x+3x-2x+4x\leq -2+3+9$$
$$7x\leq 10$$
$$x\leq\frac{10}{7}$$

Resposta: S = {x ∈ ℝ / x ⩽ 10/7}

b) $\frac{2x}{5}-\frac{3}{10}(x-2)>\frac{6x}{5}-\frac{1}{2}$, multiplicando a desigualdade por 10:

$$2(2x)-3(x-2)>2(6x)-5$$
$$4x-3x+6>12x-5$$
$$4x-3x-12x>-5-6$$
$$-11x>-11(\text{multiplicando por }-1)$$
$$x<1$$

Resposta: S = {x ∈ ℝ / x ⩽ 1}

P 13.37

a) $(3a^2-2b^3)^2=(3a^2)^2-2(3a^2)(2b^3)+(2b^3)^2=9a^4-12a^2b^3+4b^6$

b) $\left(a-\frac{3}{4}\right)(a+3)=a^2+\left(3-\frac{3}{4}\right)a+3\left(-\frac{3}{4}\right)=a^2+\frac{9}{4}a-\frac{9}{4}$

c) $\left(2c+\frac{1}{2}d\right)^3=(2c)^3+3(2c)^2\left(\frac{1}{2}d\right)+3(2c)\left(\frac{1}{2}d\right)^2+\left(\frac{1}{2}d\right)^3=$

$$=8c^3+6c^2d+\frac{3}{2}cd^2+\frac{1}{8}d^3$$

P 13.40

a) $5x^3y - x^2y = x^2y(5x-1)$
b) $\frac{2}{3}a^2b^5 + \frac{4}{3}a^3b^4 - \frac{2}{3}a^5b^3 = \frac{2}{3}a^2b^3(b^2 + 2ab - a^3)$
c) $15a^4 + a^2b - 15a^3b - ab^2 = 15a^3(a-b) + ab(a-b) = a(15a^2+b)(a-b)$
d) $p^{2m} - 2p^mq^n + q^{2n} = (p^m - q^n)^2$

P 13.42

a) $\frac{3a}{4} : \frac{9b}{7} = \frac{3a}{4} \times \frac{7}{9b} = \frac{21a}{36b} = \frac{7a}{12b}$
b) $\frac{x^2+2x}{3x^2} . \frac{3x-3}{5x+10} = \frac{x(x+2)}{3x^2} . \frac{3(x-1)}{5(x+2)} = \frac{x(x-1)}{5x}$
c) $\frac{x^2-4}{9x^2-16} : \frac{2x+4}{3x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(3x-4)(3x+4)} \times \frac{3x+4}{2(x+2)} = \frac{x-2}{2(3x-4)}$
d) $\left(\frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{y} - 2\right) : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) = \left(\frac{y(x+y)-x(x-y)-2xy}{xy}\right) : \left(\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right) =$
$= \left(\frac{xy+y^2-x^2+xy-2xy}{xy}\right) \times \left(\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}\right) = \left(\frac{y^2-x^2}{xy}\right) \times \left(\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}\right) = xy$

Capítulo 4 – Razões, Proporções e Regra de Três

P 13.44

$a)\ \frac{x}{2-x} = \frac{7}{5}$

$$5x = 7(2-x)$$
$$5x = 14 - 7x$$
$$5x + 7x = 14$$
$$12x = 14$$
$$x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

b) $\left(6 - \frac{1}{5}\right) : \left(5 - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right) : x$

$$\left(\frac{30-1}{5}\right) : \left(\frac{30-1}{6}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) : x$$
$$\left(\frac{29}{5}\right) : \left(\frac{29}{6}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) : x$$
$$\left(\frac{29}{5}\right) \times \left(\frac{6}{29}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) : x$$
$$\frac{6}{5} = \left(\frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{x}$$
$$30x = 20$$
$$x = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

P 13.47

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{4} & (1) \\ a + b = 30 & (2) \end{cases}$$

De (1), tiramos que $b = 4a$, substituindo em (2):

$$a + 4a = 30 \ \rightarrow 5a = 30 \ \rightarrow \ a = 6$$

E, nesse caso, $b = 4a = 4.6 = 24$.

Resposta: A primeira parte tem 6 cm e a segunda parte tem 24 cm

P 13.48

Sejam x = área do 1º quadrado e y = área do 2º quadrado. Então:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} & (1) \\ x + y = 56 & (2) \end{cases}$$

De (1), tiramos que $4x = 3y \;\; \rightarrow x = \frac{3y}{4}$, substituindo em (2):

$$\frac{3y}{4} + y = 56 \;\; \rightarrow 3y + 4y = 224 \;\; \rightarrow \;\; 7y = 224 \;\; \rightarrow \;\; y = 32$$

E, nesse caso, $x = \frac{3.32}{4} = 24$.

Resposta: As áreas são 24 m^2 e 32 m^2

P 13.49

Sejam x = nº de palmeirenses e y = nº de corintianos. Então:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} & (1) \\ x + y = 36 & (2) \end{cases}$$

De (1), tiramos que $y = 2x$, substituindo em (2):

$$x + 2x = 36 \;\; \rightarrow 3x = 36 \;\; \rightarrow \;\; x = 12$$

E, nesse caso, $y = 2 \times 12 = 24$.

Resposta: Havia 12 mil palmeirenses

P 13.52

C = R$ 50.000,00 $\quad j = \frac{C.i.t}{100} = \frac{50.000 \times 3 \times 18}{100} = 1.500 \times 18 = 27.000$

t = 18 meses

i = 3% a.m.

Resposta: Os juros são de R$ 27.000,00

Capítulo 5 – Funções do 1º e 2º graus

P 13.54

A função em questão é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $-\frac{3}{2} < 0$, portanto, decrescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:

$$-\frac{3}{2}x + 3 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x = -3 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Logo, a função é positiva antes de $x = 2$ e negativa após $x = 2$

Resposta: $\forall\ x \in \mathbb{R} /\ x < 2 \Rightarrow y > 0$ e $\forall\ x \in \mathbb{R} /\ x > 2 \Rightarrow y < 0$

P 13.55

$a)\ f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

A função em questão é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $\frac{1}{2} > 0$, portanto, crescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:

$$\frac{1}{2}x + 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -3 \quad \rightarrow \quad x = -6$$

Logo, a função é negativa antes de $x = -6$ e positiva após $x = -6$.

Resposta: $\forall\ x \in \mathbb{R} /\ x < -6 \Rightarrow y < 0$ e $\forall\ x \in \mathbb{R} /\ x > -6 \Rightarrow y > 0$

b) $f(x) = \frac{4x-8}{3}$

A função em questão é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $\frac{4}{3} > 0$, portanto, crescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:

$$\frac{4x - 8}{3} = 0$$

$$\frac{4}{3}x = \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Logo, a função é negativa antes de $x = 2$ e positiva após $x = 2$.

Resposta: $\forall\ x \in \mathbb{R} /\ x < 2 \Rightarrow y < 0$ e $\forall\ x \in \mathbb{R} /\ x > 2 \Rightarrow y > 0$

c) $f(x) = \frac{-4}{5}x + \frac{2}{5}$

A função em questão é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $-\frac{4}{5} < 0$, portanto, decrescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{4}{5}x = -\frac{2}{5} \;\; \rightarrow \;\; x = \frac{1}{2}$$

Logo, a função é positiva antes de $x = \frac{1}{2}$ e negativa após $x = \frac{1}{2}$

Resposta: $\forall\, x \in \mathbb{R} /\; x < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 0$ e $\forall\, x \in \mathbb{R} /\; x > \frac{1}{2} \Rightarrow y < 0$

P 13.61

$a)$ $\frac{(2-5x)(x+1)}{(-x+3)} \leq 0$

Vamos estudar cada parte separadamente:

- $2 - 5x$; é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $-5 < 0$, portanto, decrescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:
$$2 - 5x = 0 \;\rightarrow x = \frac{2}{5}$$
- $x + 1$; é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $1 > 0$, portanto, crescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:
$$x + 1 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = -1$$
- $-x + 3$; é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $-1 < 0$, portanto, decrescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:
$$-x + 3 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 3$$

$$-1 \qquad\qquad 2/5 \qquad\qquad 3$$

$2 - 5x$	+	+	−	−
$x + 1$	−	+	+	+
$-x + 3$	+	+	+	−
inequação	−	+	−	+

Resposta: S = { $x \in \mathbb{R} /\; x \leq -1 \vee 2/5 \leqslant x < 3$}

b) $\frac{x^2-1}{x+2} > 0$

Vamos estudar cada parte separadamente:

- $x^2 - 1$; é uma função do 2º grau, com concavidade positiva, portanto, fora das raízes positiva e dentro das raízes, negativa. As raízes são:
$$x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow x^2 = 1 \;\; \rightarrow x = \pm 1$$
- $x + 2$; é uma função do 1º grau, com coeficiente angular $1 > 0$, portanto, crescente. Ela muda de sinal na raiz, ou seja, em:
$$x + 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = -2$$

		-2	-1	1
x^2-1	$+$	$+$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
inequação	$-$	$+$	$-$	$+$

Resposta: S= { $x \in \mathbb{R} / -2 < x < 1 \vee x > 1$}

Capítulo 7 – Função Modular

P 13.64

a) $|2x+7| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+7=3 \rightarrow 2x=3-7 \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2 \\ \text{ou} \\ 2x+7=-3 \rightarrow 2x=-3-7 \rightarrow 2x=-10 \rightarrow x=-5 \end{cases}$

Resposta: S = $\{-5; -2\}$

b) $|x^2-5| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5=4 \rightarrow x^2=4+5 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3 \\ \text{ou} \\ x^2-5=-4 \rightarrow x^2=-4+5 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

Resposta: S = $\{-3; -1; 1; 3\}$

c) $|2x+1| = x-3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=x-3, \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow x=-4 < -1/2 \\ \text{ou} \\ 2x+1=-x+3\text{ , se } x < -\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{2}{3} > -1/2 \end{cases}$

Resposta: S = $\varnothing$

d) $|x-1| = |3x+2| \Rightarrow \begin{cases} x-1=3x+2 \rightarrow -2x=3 \rightarrow x=-3/2 \\ \text{ou} \\ x-1=-3x-2 \rightarrow 4x=-1 \rightarrow x=-1/4 \end{cases}$

Resposta: S = $\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\}$

P 13.65

a) $|7x-1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 7x-1>5 \rightarrow 7x>6 \rightarrow x>6/7 \\ \text{ou} \\ 7x-1<-5 \rightarrow 7x<-4 \rightarrow x<-4/7 \end{cases}$

Resposta: S = $\{\, x \in \mathbb{R} /\ x < -\frac{4}{7} \ \vee \ x > \frac{6}{7}\}$

b) $|x^2-3x-4| \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-4 \leq 6 \rightarrow x^2-3x-10 \leq 0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ x^2-3x-4 \geq -6 \rightarrow x^2-3x+2 \geq 0 \quad (2) \end{cases}$

Vamos estudar o sinal das inequações separadamente:

(1) $x^2-3x-10 \leq 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes de $x^2-3x-10$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4.1.(-10)}}{2.1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função tem sinal negativo dentro das raízes, ou seja, em $[-2; 5]$.

(2) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes de $x^2 - 3x + 2$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função tem sinal positivo fora das raízes, ou seja, em $]-\infty; 1] \cup [2; \infty[$.

Fazendo interseção entre as soluções, $[-2; 1] \cup [2; 5]$.

Resposta: S= { $x \in \mathbb{R}$/ -2 $\leqslant x \leqslant$ 1 $\vee$ 2$\leqslant x \leqslant$5}

P 13.67

a) $4^{x+1} = \frac{1}{8^{2x}}$. Vamos escrever a igualdade como potências de base 2:

$$(2^2)^{x+1} = \frac{1}{(2^3)^{2x}}$$
$$2^{2x+2} = 2^{-6x}$$
$$2x + 2 = -6x$$
$$2x + 6x = -2$$
$$8x = -2 \quad \rightarrow x = -1/4$$

Resposta: S = $\{-1/4\}$

b) $2^{-5x+x^2} = \frac{1}{2^6}$. Vamos escrever a igualdade como potências de base 2:

$$2^{-5x+x^2} = 2^{-6}$$
$$-5x + x^2 = -6$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara para achar as raízes da equação acima:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Resposta: S = $\{2; 3\}$

c) $3.5^{x^2} + 3^{x^2}.3 = 8.3^{x^2}$. Primeiro vamos colocar o termo comum em evidência:

$$3.5^{x^2} = 8.3^{x^2} - 3^{x^2}.3$$
$$3.5^{x^2} = 3^{x^2}(8 - 3)$$
$$3.5^{x^2} = 5.3^{x^2}$$
$$\frac{5^{x^2}}{3^{x^2}} = \frac{5}{3}$$
$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} = \frac{5}{3}$$

Como as bases são iguais, vamos comparar os expoentes:

$$x^2 = 1 \rightarrow \quad x = \pm 1$$

Resposta: S = $\{-1; 1\}$

d) $2^{1+x} + \sqrt{8} = \sqrt{72}$. Fatorando 8 e 72, temos:

$$2^1 . 2^x + \sqrt{2^3} = \sqrt{2^3 . 3^2}$$
$$2^1 . 2^x + 2\sqrt{2} = 2.3\sqrt{2} \quad : (2)$$
$$2^x + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$2^x = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$$
$$2^x = 2\sqrt{2}$$
$$2^x = 2 . 2^{1/2} = 2^{3/2} \quad \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Resposta: S = $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

P 13.70

a) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3}$.Vamos escrever a igualdade como potências de 3:

$$(3^2)^{x+1} = 3^{1/3}$$

Comparando os expoentes:

$$2x + 2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow 2x = -\frac{5}{3} \quad \rightarrow x = -\frac{5}{6}$$

Resposta: S = $\left\{-\frac{5}{6}\right\}$

b) $4^x - 2^x = 12 \quad \rightarrow (2^2)^x - 2^x = 12$. Fazendo a substituição $y = 2^x$, temos:

$$y^2 - y - 12 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara para achar as raízes da equação acima:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-12)}}{2.1} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

Voltando à substituição, para $y_1 = 4 \rightarrow 2^x = 4 = 2^2$, donde segue que $x = 2$. Para $y_2 = -3 \rightarrow 2^x = -3 \notin \mathbb{R}$.

Resposta: S = {2}

P 13.72

a) $4^{3x} < 16^{x+1}$. Vamos escrever a desigualdade como potências de 4:

$$4^{3x} < (4^2)^{x+1}$$

Como a base é 4 > 1, comparam-se os expoentes, mantendo a desigualdade:

$$3x < 2x + 2 \quad \rightarrow x < 2$$

Resposta: S = $\{x \in \mathbb{R} / \ x < 2\}$

b) $5^{x+1}.5^{2(x-1)} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^5$ Vamos escrever a desigualdade como potências de 5:

$$5^{x+1+2x-2} \leq 5^{-5}$$

Como a base é 5 > 1, comparam-se os expoentes, mantendo a desigualdade:

$$x + 1 + 2x - 2 \leq -5$$
$$3x \leq -4 \ \rightarrow x \leq -4/3$$

Resposta: S = {$x \in \mathbb{R} /\ x \leq -4/3$}

c) $7^{3x^2+4x-4} \leq 1$. Vamos escrever a desigualdade em potências de base 7:

$$7^{3x^2+4x-4} \leq 7^0$$

Como a base é 7 > 1, comparam-se os expoentes, mantendo a desigualdade:

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara para achar as raízes da função do 2º grau associada:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.3.(-4)}}{2.3} = \frac{-4 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2/3 \end{cases}$$

Como a função associada tem concavidade positiva, ela tem sinal negativo dentro das raízes, ou seja, a inequação se resolve para valores em $[-2; 2/3]$.

Resposta: S = {$x \in \mathbb{R} /\ -2 \leqslant x \leqslant 2/3$}

Capítulo 9 – Função Logarítmica

P 13.76

a) $\log \frac{p.q.r}{s} = \log(p.q.r) - \log s = \log p + \log q + \log r - \log s$

b) $t = \frac{m^2 \sqrt[3]{n}}{p}$. Aplicando logaritmo em ambos os lados:

$$\log t = \log\left(\frac{m^2\sqrt[3]{n}}{p}\right) = \log\left(m^2\sqrt[3]{n}\right) - \log p = \log m^2 + \log\sqrt[3]{n} - \log p$$
$$= \quad 2\log m + \frac{1}{3}\log n - \log p =$$
$$= \quad 2\log m + \frac{1}{3}\log n + \operatorname{co}\log p$$

P 13.78

$$\log_a(a+2) = 2 \;\leftrightarrow\; a^2 = a + 2 \;\leftrightarrow\; a^2 - a - 2 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, temos:

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

Como a base deve ser positiva, $a = 2$.

Resposta: A base é igual a 2

P 13.80

Pelas condições de existência do logaritmo:

(1) $x^2 - 5x + 6 > 0$
(2) $x - 1 > 0$
(3) $x - 1 \neq 1$

Para resolver a inequação (1), precisamos achar as raízes da função do 2º grau associada:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Como a função associada tem concavidade positiva, a inequação tem solução para $x < 2 \lor x > 3$

(2) $x - 1 > 0 \;\rightarrow\; x > 1$
(3) $x - 1 \neq 1 \;\rightarrow x \neq 2$

Fazendo interseção entre as três condições: D(f) = $\{x \in \mathbb{R} /\ 1 < x < 2 \lor x > 3\}$.

Resposta: D(f) = $\{x \in \mathbb{R} /\ 1 < x < 2 \lor x > 3\}$

P 13.81

a) $f(x) = \log(3x-1) + \log(4x-5)$

Pelas condições de existência de cada logaritmo, temos:

(1) $3x - 1 > 0 \;\; \rightarrow \;\; 3x > 1 \;\; \rightarrow x > \frac{1}{3}$;

(2) $4x - 5 > 0 \;\; \rightarrow \;\; 4x > 5 \;\; \rightarrow x > \frac{5}{4}$.

Fazendo interseção das condições acima, D(f) = $\{x \in \mathbb{R} / \; x > 5/4\}$.

Resposta: D(f) = $\{x \in \mathbb{R} / \; x > 5/4\}$

b) $f(x) = \ln(2x^2 - 5x + 3)$

Pela condição de existência, $2x^2 - 5x + 3 > 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes da função do 2º grau associada, temos:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.2.3}}{2.2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Como a função do 2º grau associada tem concavidade positiva, o sinal da função é positivo fora das raízes, ou seja, para $x < 1$ ou $x > 3/2$.

Resposta: D(f) = $\{x \in \mathbb{R} / \; x < 1 \vee x > 3/2\}$

P 13.83

a) $\log_{(x-1)} 4 = 2$. Pela condição de existência do logaritmo, temos:

(1) $x - 1 > 0 \;\; \rightarrow \;\; x > 1$

(2) $x - 1 \neq 1 \;\; \rightarrow \;\; x \neq 2$

Pela definição de logaritmo, segue a seguinte igualdade:

$$(x-1)^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Neste caso, apenas o x = 3 serve.

Resposta: S = {3}

b) $\log_2 x + \log_4 x = 3$. Pela condição de existência do logaritmo, devemos ter $x > 0$.

$$\log_2 x + \log_4 x = 3 \;\rightarrow\; \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3 \;\rightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 3$$

$$3\frac{\log_2 x}{2} = 3 \;\rightarrow\; \log_2 x = 2 \;\rightarrow\; x = 2^2 = 4$$

Resposta: S = {4}

P 13.85

a) $\log_2(x^2 - \frac{1}{4}) \leq 1$. Pela condição de existência do logaritmo, devemos ter $x^2 - \frac{1}{4} > 0$.

Determinando as raízes da função do 2º grau associada, $x^2 - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$. Como a função associada tem concavidade positiva, ela tem sinal positivo fora das raízes, ou seja, para $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{1}{2}$. Agora, para resolver a inequação,

$$\log_2(x^2 - \frac{1}{4}) \leq 1 \;\leftrightarrow \log_2(x^2 - \frac{1}{4}) \leq \log_2 2$$

Como a base é $2 > 1$, mantém-se a desigualdade e comparam-se os logaritmandos:

$$x^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \quad \rightarrow x^2 - \frac{9}{4} \leq 0$$

Determinando as raízes da função do 2º grau associada, $x^2 - \frac{9}{4} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$. Como a função associada tem concavidade positiva, ela tem sinal negativo dentro das raízes, ou seja, para $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Fazendo interseção com a condição acima, segue que: S = $\left[-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

Resposta: S = $\left[-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right]$

b) $\log_{1/2}(x^2 - 5x + 8) + 1 < 0$. Pela condição de existência do logaritmo, devemos ter $x^2 - 5x + 8 > 0$.

Determinando as raízes da função do 2º grau associada pela fórmula de Bháskara,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Como o discriminante é negativo, a função associada não tem raízes reais, ou seja, ela tem sinal positivo para todos os valores de x. Agora, para resolver a inequação,

$$\log_{1/2}(x^2 - 5x + 8) < -1 \;\leftrightarrow \log_{1/2}(x^2 - 5x + 8) < \log_{1/2}(1/2)^{-1}$$

Como a base é $1/2 < 1$, inverte-se a desigualdade e comparam-se os logaritmandos:

$$x^2 - 5x + 8 > (1/2)^{-1} \quad \rightarrow x^2 - 5x + 8 > 2 \;\rightarrow\; x^2 - 5x + 6 > 0$$

Determinando as raízes da função do 2º grau associada, $x^2 - 5x + 6 = 0$, pela fórmula de Bháskara,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Como a função associada tem concavidade positiva, a inequação tem solução para $x < 2 \ \vee x > 3$. Segue então que: S $=]-\infty; 2[\cup]3; \infty[$.

Resposta: S $=]-\infty; 2[\cup]3; \infty[$

P 13.86

A condição é que o discriminante seja positivo:

$$\Delta = (-4)^2 - 4.2.\log_2 a \geq 0$$
$$16 - 8\log_2 a \geq 0$$
$$8\log_2 a \leq 16$$
$$\log_2 a \leq 2 \ \leftrightarrow \ \log_2 a \leq \log_2 2^2$$

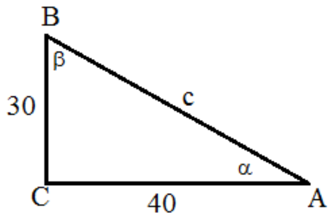
Como a base é $2 > 1$, mantém-se a desigualdade e comparam-se os logaritmandos, lembrando sempre que a condição de existência é que o logaritmando seja positivo:

$$0 < a \leq 4$$

Resposta: $\forall\ a \in \mathbb{R}$ / 0< a <4

Capítulo 10 – Trigonometria

P 13.88



Primeiro, vamos determinar a hipotenusa do triângulo retângulo, aplicando o teorema de Pitágoras:

$c^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500\alpha$

$c = 50$

Aplicando as definições, segue:

sen $\alpha = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} =$cos β

cos $\alpha = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} =$ sen β

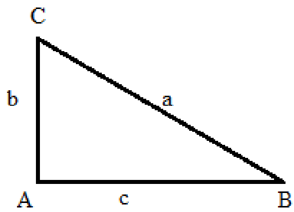
tg $\alpha = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} =$ cotg β

cotg $\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{4}{3} =$ tg β

sec $\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{4} =$ cossec β

cossec $\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{5}{3} =$ sec β

P 13.90



Pelo teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como $a - c = 2$, então $a = c + 2$:

$$(c+2)^2 = 16 + c^2$$

$$c^2 + 4c + 4 = 16 + c^2 \;\rightarrow 4c = 12 \;\rightarrow c = 3$$

Logo, cotg $\hat{C} = \frac{b}{c} = \frac{4}{3}$

Resposta: cotg $\hat{C} = \frac{4}{3}$

P 13.92

a) às 14h. Vamos fazer a seguinte proporção:

$$1\,h \;\leftrightarrow\; 30°$$
$$2\,h \;\leftrightarrow\; x$$
$$x = 2 \times 30 = 60$$

Resposta: 60º.

b) às 10h30min.

$$60\,min \;\leftrightarrow\; 30°$$
$$30\,min \;\leftrightarrow\; x$$

$$x = \frac{30 \times 30}{60} = 15$$

Resposta: 15°

P 13.95

a)

$$180° \leftrightarrow \pi\, rad$$
$$x \leftrightarrow \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$
$$\pi x = \frac{180 \times \pi}{5} \rightarrow x = 36°$$

b)

$$180° \leftrightarrow \pi\, rad$$
$$40° \leftrightarrow y \text{ rad}$$
$$180y = 40\pi \rightarrow y = \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$$

P 13.97

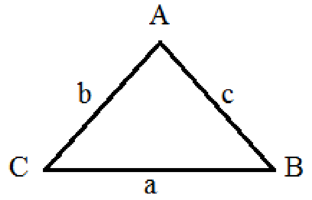
$$180° \leftrightarrow \pi\, rad$$
$$50° \leftrightarrow \alpha \text{ rad}$$

$$180\alpha = 50\pi \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{18}$$

Como $l = \alpha . r = \frac{5\pi}{18} . 9 = 2{,}5\pi = 2{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}85$.

Resposta: O comprimento é 7,85 cm

P 13.99



Utilizando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$
$$2ab \cos \hat{C} = a^2 + b^2 - c^2$$
$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

P 13.101

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;\; \rightarrow \;\; 4.\cos x = 3.\operatorname{sen} x \quad \rightarrow \cos x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x$$

Substituindo na relação trigonométrica fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} x\right)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{9}{16}\operatorname{sen}^2 x = 1$$
$$\frac{25}{16}\operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}$.Então,

$$\csc x = \frac{1}{senx} = \frac{1}{-{}^4\!/_5} = -\frac{5}{4}$$

P 13.103

$$y = \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{1 + 2.\cos x + \cos^2 x} \times \frac{(1+\cos x)}{\operatorname{sen} x} =$$
$$\frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} \times \frac{(1+\cos x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Calculemos o valor de $\operatorname{sen} x$, usando a identidade trigonométrica fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \;\; \rightarrow \;\; \operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \;\; \rightarrow \;\; \operatorname{sen} x = \pm\frac{3}{5}$$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$. Voltando ao valor de y:

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{-{}^3\!/_5} = -\frac{5}{3}$$

P 13.105

Substituindo $\operatorname{sen}(2x) = 2.\operatorname{sen} x.\cos x$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}(2\,x) - \operatorname{sen} x.\cos x}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{2.\operatorname{sen} x.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos x}{2.\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x.\cos x}{2.\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{1}{2}$$

P 13.107

Façamos $\alpha = \arc\cos\frac{12}{13} \rightarrow \cos\alpha = \frac{12}{13}$. Aplicando a identidade trigonométrica fundamental:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \;\rightarrow\; \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$$

P 13.109

Substituindo pela igualdade trigonométrica: $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$, temos:

$$\text{tg}^2 x + 1 + \text{tg}\,x - 1 = 0 \;\rightarrow\; \text{tg}^2 x + \text{tg}\,x = 0 \;\rightarrow\; \text{tg}\,x\,(\text{tg}\,x + 1) = 0$$

$$\text{tg}\,x = 0 \;\lor\; \text{tg}\,x + 1 = 0$$

Para $\text{tg}\,x = 0 \;\rightarrow\; x = k\pi$ e para $\text{tg}\,x = -1 \;\rightarrow\; x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Resposta: S = $\{x \in \mathbb{R} / \; x = k\pi \lor x = \frac{3\pi}{4} + k\pi;\; k \in \mathbb{Z}\}$

P 13.111

Para x ∈ [0; 2π]:

$\text{tg}\,x > \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$

A solução geral é:

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Resposta: S = $\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \lor \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\; k \in \mathbb{Z}\}$

Capítulo 11 – Conjunto dos Números Complexos

P 13.113

a)

$$(8,2x) = (4y,7) \Rightarrow \begin{cases} 8 = 4y & \rightarrow \quad y = 2 \\ 2x = 7 & \rightarrow \quad x = 7/2 \end{cases}$$

b)

$$(x+y,3) = (9,6y) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9 & \rightarrow \quad x = 9 - y \\ 3 = 6y & \rightarrow \quad y = 1/2 \end{cases}$$

Daí, $x = 9 - y = 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$

c) $z_1 + z_2 = (2,3) + (1,-2) = \big(2+1, 3+(-2)\big) = (3,1)$
$z_1 \times z_2 = (2.1 - 3(-2), 2(-2) + 3.1) = (8,-1)$

P 13.115

a) $x = 0$ e $y - 1 \neq 0 \quad \rightarrow x = 0$ e $y \neq 1$
b) $y = 1$

P 13.118

Como vimos, os resultados de i^n, n $\in \mathbb{N}$, com expoente n variando, repetem-se de quatro em quatro unidades. Então, se z = i, z^n pode assumir quatro valores distintos, isto é, z $\in$ { 1, i ,-1 ,-i}, $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$. Notemos que para n $\in \mathbb{N}$, $i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = 1.i^r$, o expoente 4n representa os números que são divisíveis por 4. Desta forma, para calcular i^n basta calcular i^r, onde r é o resto da divisão de n por 4.

a) $55 = 4 \times 13 + 3$, então : $i^{55} = i^3 = -i$

b) $9 = 4 \times 2 + 1$, então : $i^9 = i^1 = i$, logo: $i^{-9} = \frac{1}{i^9} = \frac{1}{i} = -i$

c) $(-i)^{-4} = \frac{1}{(-i)^4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$

P 13.119

Aplicando $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$(1+2i)^3 = 1^3 + 3.1^2.(2i) + 3.1.(2i)^2 + (2i)^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$

P 13.121

$$i^7 + \frac{5-4i}{2+3i} = i^{4\times 1+3} + \frac{(5-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = i^3 + \frac{10-15i-8i+12i^2}{4+9}$$
$$= -i + \frac{-2-23i}{13} = \frac{-13i-2-23i}{13} = \frac{-2-36i}{13}$$

P 13.123

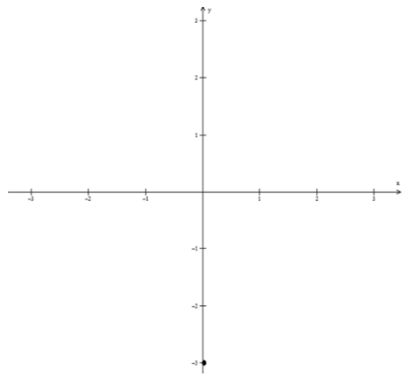
$$\mathrm{z} = \sqrt{3} - i \Rightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\mathrm{a}}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{b}}{\rho} = \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i\,sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

P 13.125

$$\mathrm{z} = -3i \Rightarrow \rho = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\mathrm{a}}{\rho} = \frac{0}{3} = 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{b}}{\rho} = \frac{-3}{3} = -1 \end{array}\right\} \theta = \frac{3\pi}{2}$$



P 13.127

$$z_1 \times z_2 = 7 \times 5\left[\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\right)\right] =$$
$$35\left[\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{10}\right)\right] =$$
$$35\left[\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{10}\right)\right] =$$
$$35\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

P 13.129

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{11\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{11\pi}{8}\right)\right] =$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{8\pi}{8}\right)\right] =$$
$$\sqrt{2}[\cos(-\pi) + i\,\text{sen}(-\pi)]$$

Na forma algébrica, basta resolver a trigonométrica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}[\cos(-\pi) + i\,\text{sen}(-\pi)] = \sqrt{2}[0 + i(-1)] = -\sqrt{2}i$$

P 13.131

Passando para a forma trigonométrica:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow \rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-1}{2} \end{matrix}\right\} \theta = \frac{11\pi}{6} \quad \Rightarrow z = 1\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \text{ i sen }\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

$$z^{100} = 1^{100}\left(\cos\left(100 \times \frac{11\pi}{6}\right) + \text{ i sen }\left(100 \times \frac{11\pi}{6}\right)\right) =$$
$$1\left(\cos\left(\frac{550\pi}{3}\right) + \text{ i sen }\left(\frac{550\pi}{3}\right)\right) =$$
$$1\left(\cos\left(182\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + \text{ i sen }\left(182\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$
$$1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \text{ i sen }\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$
$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

P 13.133

$$x^4 = 16 \ \rightarrow \ x = \sqrt[4]{16}$$

Chamando de $z = x^4$ e passando para a forma trigonométrica:

$$z = 16 + 0i \Rightarrow \rho = \sqrt{(16)^2 + (0)^2} = 16$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{16}{16} = 1 \\ \text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{0}{16} = 0 \end{matrix}\right\} \theta = 0 \quad \Rightarrow z = 16(\cos(0) + \text{ i sen }(0))$$

Pela 2ª formula de De Moivre, temos:

$$z^{1/4} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + \text{ i sen }\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + \text{ i sen }\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right), \text{para k} = 0{,}1, \text{e } 3.$$

$$z_0 = 2\big(\cos(0) + i\text{sen}(0)\big) = 2(1 + \text{i}0) = 2$$
$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(0 + \text{i}1) = 2\text{i}$$
$$z_2 = 2\big(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)\big) = 2(-1 - \text{i}0) = -2$$
$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2(0 - \text{i}1) = -2\text{i}$$

Resposta: S = {2; 2i; –2; – 2i}

P 13.135

Fazendo $z = x^2$ e substituindo na equação: $z^2 + 5z + 4 = 0$. Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar o valor de z, temos:

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

Voltando à igualdade:

- Para $z_1 = -4$, temos $x^2 = -4 \;\; \rightarrow \;\; x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$;
- Para $z_2 = -1$, temos $x^2 = -1 \;\; \rightarrow \;\; x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$;

Resposta: S = {-i, i, -2i, 2i}

Capítulo 12 – Progressões

P 13.137

Vamos escrever os termos acima usando a fórmula geral da P.A.:

$$a_3 = 5 \;\; \rightarrow \;\; a_1 + 2r = 5 \;\; (1)$$
$$a_8 = 20 \;\; \rightarrow \;\; a_1 + 7r = 20 \;\; (2)$$

Fazendo $(2) - (1)$:

$$5r = 15 \;\; \rightarrow \;\; r = 3$$

De (1), tiramos que:

$$a_1 = 5 - 2r = 5 - 2.3 = -1$$

Agora, calculando o 11º termos:

$$a_{11} = a_1 + 10r = -1 = 10.3 = 29$$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A.:

$$S_{11} = \frac{(a_1 + a_{11}).11}{2} = \frac{(-1 + 29).\,11}{2} = 14 \times 11 = 154$$

P 13.140

$$a_5 = a_1 + 4r \;\; \rightarrow \;\; \frac{11\sqrt{2}}{9} = \sqrt{2} + 4r$$
$$4r = \frac{11\sqrt{2}}{9} - \sqrt{2} = \frac{11\sqrt{2}}{9} - \frac{9\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$
$$r = \frac{2\sqrt{2}}{9 \times 4} = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

P 13.141

$$x + 2 - x = (3x - 4) - (x + 2)$$
$$2 = 2x - 6$$
$$2x = 8 \;\; \rightarrow \;\; x = 4$$

A P.A. é 4, 6, 8 e a razão é 2

Resposta: A razão é 2

P 13.144

Vamos calcular a razão:

$$r = \frac{a_n - a_1}{k+1} = \frac{1-(-2{,}5)}{6+1} = \frac{3{,}5}{7} = \frac{1}{2}$$

Logo, $(-2{,}5;\ -2{,}0;\ -1{,}5;\ -1{,}0;\ -0{,}5;\ 0;\ 1{,}0)$

P 13.146

Seja *x* o número, então a P.G. é:

$$(x+1; x+3; x+8)$$

Logo,

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+8}{x+3} \ \rightarrow\ (x+3)^2 = (x+1)(x+8)$$

Desenvolvendo o produto notável e a propriedade distributiva,

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + x + 8$$
$$6x - 9x = 8 - 9$$
$$-3x = -1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Resposta: Devemos adicionar 1/3

P 13.148

Pelo enunciado do problema, podemos concluir que está formando uma sequência:

$$(50; 25; 12{,}5; \dots)$$

Que é uma P.G. decrescente de razão $q = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$, portanto, menor que 1 e $a_1 = 50$.

Logo, a soma total dos termos é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{50}{1 - {}^{1}\!/_{2}} = \frac{50}{{}^{1}\!/_{2}} = 100$$

Resposta: O total percorrido é de 100 m

P 13.150

$$0{,}272727\ldots = 0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + \cdots$$

É uma P.G. infinita de razão $1/100 < 1$, portanto, a soma infinita de seus termos é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{27/100}{1 - 1/100} = \frac{27/100}{99/100} = \frac{27}{99}$$

Resposta: $0{,}272727\ldots = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

P 13.151

Verificamos que é a soma de uma P.G. infinita, onde $a_1 = x^2$ e $q = \frac{x^3/2}{x^2} = \frac{x}{2}$. Aplicando a fórmula da soma infinita dos termos de uma P.G.:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x^2}{1 - x/2} = \frac{2x^2}{2-x} = \frac{1}{3}$$

$$6x^2 = 2 - x \ \rightarrow \ 6x^2 + x - 2 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 6 \times (-2)}}{2 \times 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -2/3 \end{cases}$$

Resposta: S = $\{\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\}$

P 13.153

Do problema temos que $a_1 = 81$ e $q = \frac{1}{3}$, portanto, pela fórmula do produto, temos:

$$|P_{10}| = (81)^{10}.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{10(10-1)}{2}} = 3^{40}.\left(\frac{1}{3}\right)^{45} = 3^{-5}$$

Como a P.G. é de termos positivos, o produto é positivo.

Resposta: O produto $P_{10} = \frac{1}{243}$

Exercícios Gerais

P 13.155

Aplicando o MMC:

a) $\frac{2}{x-5} = \frac{3}{x-5} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4}{2(x-5)} = \frac{6+x-5}{2(x-5)} \rightarrow 4 = 1 + x \rightarrow x = 3$

Resposta: S = {3}

b) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1} \rightarrow 3x + 3 + 2x - 2 = x$

$$5x + 1 = x \rightarrow 4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Resposta: S = {-1/4}

P 13.157

a) Desenvolvendo o produto notável:

$$x^2 - 2x + 1 - 3x + 5 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Resposta: S = {2; 3}

b) $\sqrt{x^2 - 1} - x = 2 \rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 2 + x$. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$x^2 - 1 = (2 + x)^2 \rightarrow x^2 - 1 = 4 + 4x + x^2$$

$$4x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

Resposta: S = {-5/4}

P 13.160

Aplicando o MMC:

$$\frac{4}{x} - \frac{3x}{x} > \frac{2}{x} - \frac{7x}{x} \;\rightarrow\; \frac{4 - 3x - 2 + 7x}{x} > 0 \;\rightarrow\; \frac{4x + 2}{x} > 0$$

Estudando separadamente:

- $4x + 2$ é uma função do 1º grau com coeficiente angular 4 > 0, portanto, crescente, cuja raiz é $x = -1/2$. Antes da raiz a função é negativa e depois da raiz ela é positiva;
- x é negativa antes do zero e positiva depois do zero.

		-1/2	0
$4x + 2$	$-$	+	+
x	$-$	$-$	+
inequação	+	$-$	+

Resposta: S ={$x \in \mathbb{R} / x < -\frac{1}{2} \vee x > 0$}

P 13.162

Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes da função do 2º grau associada,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função tem sinal positivo fora das raízes.

Resposta: S ={$x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3$}

P 13.165

Pela propriedade de módulo de um número real:

1) $\frac{x-1}{2x-5} = 2 \;\rightarrow\; x - 1 = 2(2x - 5) \;\rightarrow x - 1 - 4x + 10 = 0 \;\rightarrow\; -3x = -9 \;\rightarrow$ $x = 3$
2) $\frac{x-1}{2x-5} = -2 \;\rightarrow x - 1 = -2(2x - 5) \;\rightarrow x - 1 + 4x - 10 \;\rightarrow\; 5x = 11 \;\rightarrow$ $x = 11/5$

Resposta: S = {11/5; 3}

P 13.167

a) Pela propriedade de módulo de um número real:

1) $\frac{x-1}{2} = x + 7$, se $x \geq 1 \ \rightarrow x - 1 = 2x + 14 \ \rightarrow \ x = -15 < 1$

2) $\frac{x-1}{2} = -x - 7$, se $x < 1 \ \rightarrow x - 1 = -2x - 14 \ \rightarrow 3x = -13 \ \rightarrow x = -\frac{13}{3} < 1$

Resposta: S = $\{-\frac{13}{3}\}$

b) Pela propriedade de módulo de um número real:

1) $x + 1 = 3x + 2$, se $x \geq -1 \ \rightarrow 2x = -1 \rightarrow \ x = -\frac{1}{2} \geq -1$

2) $x + 1 = -3x - 2$, se $x < -1 \ \rightarrow 4x = -3 \ \rightarrow x = -\frac{3}{4} \geq -1$

Resposta: S = $\{-\frac{1}{2}\}$

P 13.170

a) Pela propriedade de módulo:

$$-2 \leq 3x + 8 \leq 2$$
$$-2 - 8 \leq 3x \leq 2 - 8$$
$$-10 \leq 3x \leq -6$$
$$-\frac{10}{3} \leq x \leq -2$$

Resposta: S =$\{x \in \mathbb{R} / -\frac{10}{3} \leq x \leq -2\}$

b) Pela propriedade de módulo:

$$\frac{1-x}{2} \geq \frac{2}{3} \quad \vee \quad \leq \frac{1-x}{2} \leq -\frac{2}{3}$$
$$3(1-x) \geq 4 \quad \vee \quad 3(1-x) \leq -4$$
$$3 - 3x \geq 4 \quad \vee \quad 3 - 3x \leq -4$$
$$-3x \geq 1 \quad \vee \quad -3x \leq -7$$
$$x \leq -1/3 \quad \vee \quad x \geq 7/3$$

Resposta: S =$\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{7}{3} \vee x \leq -\frac{1}{3}\}$

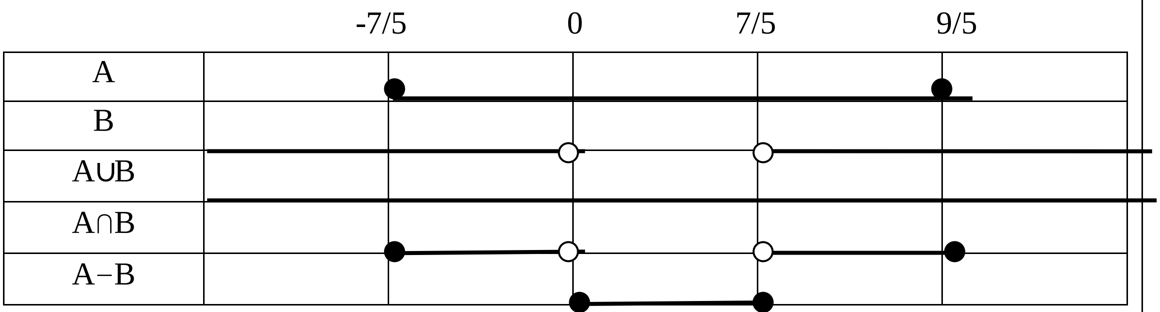
P 13.173

Vamos determinar os conjuntos A e B:

$A \ \rightarrow \ \left|3x - \frac{1+x}{2}\right| \leq 4$. Pela propriedade de módulo, temos:

$$-4 \leq 3x - \frac{1+x}{2} \leq 4$$
$$-8 \leq 6x - 1 - x \leq 8$$
$$-8 + 1 \leq 5x \leq 8 + 1$$
$$-7 \leq 5x \leq 9$$
$$-7/5 \leq x \leq 9/5$$

$B \ \rightarrow \ 5x^2 - 7x > 0 \ \rightarrow \ x(5x - 7) > 0$, as raízes são 0 e 7/5. A função é positiva fora das raízes.



Respostas: a) $\mathbb{R}$; b) $\left[-\frac{7}{5}; 0\right[\cup \left]\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right]$; c) $\left[0; \frac{7}{5}\right]$

P 13.175

a) Pela condição de existência, devemos ter $x^2 - 4 \geq 0$. Como temos uma função do 2º grau com coeficiente de x^2 positivo e raízes ± 2, temos que a função é positiva fora das raízes. Logo, o domínio da função $f(x)$ está em $x \leq -2$ e $x \geq 2$.

Resposta: D(f) = {$x \in \mathbb{R}$/ $x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$}

b) Pela condição de existência, devemos ter $2^{-x} - 32 > 0$. Como temos uma inequação exponencial, vamos igualar as bases: $2^{-x} > 32 \ \rightarrow \ 2^{-x} > 2^5$. Como a base é 2 > 1, quando comparamos os expoentes, a desigualdade se mantém $-x > 5 \ \rightarrow \ x < -5$.

Resposta: D(f) = {$x \in \mathbb{R}$/ $x < -5$}

c) Pelas condições de existência da função logarítmica, devemos ter:

- $x > 0$;
- $x \neq 1$;
- $x^2 - 4x + 3 > 0$. Como temos uma função do 2º grau com coeficiente de x^2

positivo e raízes:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

A função é positiva fora das raízes, ou seja, $x < 1$ e $x > 3$

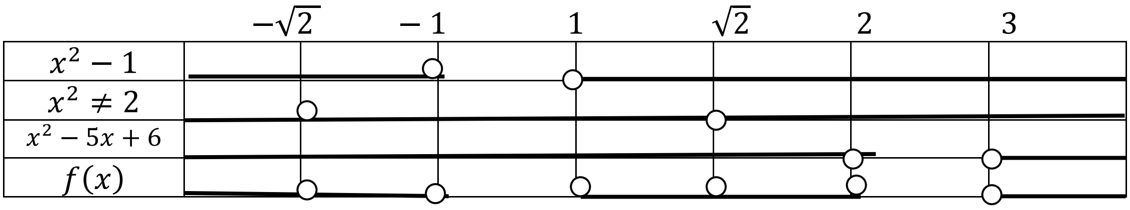
Resposta: D(f) = {$x \in \mathbb{R}$/ $0 < x < 1 \;\vee\; x > 3$}

d) Pelas condições de existência da função logarítmica, devemos ter:

- $x^2 - 1 > 0$. Como temos uma função do 2º grau com coeficiente de x^2 positivo e raízes ± 1, temos que a função é positiva fora das raízes;
- $x^2 - 1 \neq 1 \;\rightarrow\; x^2 \neq 2 \;\rightarrow\; x \neq \pm\sqrt{2}$;
- $x^2 - 5x + 6 > 0$. Como temos uma função do 2º grau com coeficiente de x^2 positivo e raízes:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

A função é positiva fora das raízes, ou seja, $x < 2$ e $x > 3$.
Fazendo interseção das condições acima, temos:



Resposta:
D(f) = {$x \in \mathbb{R}$/ $x < -\sqrt{2} \;\vee -\sqrt{2} < x < -1 \;\vee\; 1 < x < \sqrt{2} \;\vee \sqrt{2} < x < 2 \vee\; x > 3$}

e) Pelas condições de existência da função, devemos ter:

- $4 - x^2 > 0$. Como temos uma função do 2º grau com coeficiente de x^2 negativo e raízes ± 2, temos que a função é positiva dentro das raízes;
- $1 - x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 1$;

Fazendo interseção entre as condições acima, temos o domínio da função.

Resposta: D(f) = { $x \in \mathbb{R}$/ $-2 < x < 2 \;\wedge\; x \neq 1$}

P 13.177

Vamos decompor a função de acordo com a definição de módulo:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{se } x \geq 0 \\ -x + x^2, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Neste caso, segue que: D(f) = $\mathbb{R}$; Im(f) = $\mathbb{R}_+$

Gráfico: