Exercícios propostos resolvidos

Capítulo 12 – Progressões

P 12.1

Seja a sequência $(x - r;\ x;\ x\ +\ r)$, então temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}(x-r)+x+(x+r)=12 \\ (x-r).x.(x+r)=48\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3x=12 \\ x.(x^2-r^2)=48\end{cases}$$

Daí, tiramos que $x = 4$ e substituindo na segunda equação, segue:

$$4.(16-r^2)=48 \rightarrow 16-r^2=12 \rightarrow r^2=4 \rightarrow r=-2 \text{ ou } r=2$$

Para $x = 4$ e $r = 2$: $(2,4,6)$ e para $x = 4$ e $r = -2$: $(6,4,2)$

Resposta: (2, 4, 6) ou (6, 4, 2)

P 12.2

$a_1 = 5$ e $r = \frac{3}{2}$. Aplicando a fórmula do termo geral:

$$a_{13} = a_1 + (13-1)r = 5 + 12 \times \frac{3}{2} = 5 + 18 = 23.$$

Resposta: $a_{13} = 23$

P 12.3

$a_{10} = 27$ e $r = 6$. Aplicando a fórmula do termo geral:

$$a_{10} = a_1 + (10-1)r \rightarrow 27 = a_1 + 9 \times 6 \rightarrow 27 = a_1 + 54 \rightarrow a_1 = -27$$

Resposta: $a_1 = -27$

P 12.4

Observe que $a_1 = 1;\ r = 6\ e\ a_n = 121$. Aplicando a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \rightarrow 121 = 1 + (n-1) \times 6 \rightarrow 121 = 1 + 6n - 6 \rightarrow 6n = 126$$
$$\rightarrow n = 21$$

Resposta: n = 21

P 12.5

$a_{23} = 86$ e $r = 4$. Aplicando a fórmula do termo geral:

$$a_{23} = a_1 + (23-1)r \rightarrow 86 = a_1 + 22 \times 4 \rightarrow 86 = a_1 + 88 \rightarrow a_1 = -2$$

Resposta: $a_1 = -2$

P 12.6

Devemos ter:

$$2a + 1 - a = 5a + 7 - (2a + 1) \rightarrow a + 1 = 3a + 6 \rightarrow 2a = -5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

Resposta: $a = -\frac{5}{2}$

P 12.7

$a_1 = 1$ e $r = 6$. Aplicando a fórmula do termo geral,

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)r = 1 + 9 \times 6 = 1 + 54 = 55$$

Pela fórmula da soma dos 10 primeiros termos de uma P.A.:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2} = \frac{(1 + 55).10}{2} = 56 \times 5 = 280$$

Resposta: $S_{10} = 280$

P 12.8

$a_1 = 1$ e $q = 2$. Aplicando a fórmula do termo geral de uma P.G.:

$$a_{10} = a_1 \times q^{10-1} = 1 \times 2^9 = 512$$

Resposta: $a_{10} = 512$

P 12.9

$a_1 = 6144$; $q = \frac{1}{2}$ e $a_n = 3$. Aplicando a fórmula do termo geral de uma P.G.:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \rightarrow 3 = 6144 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2048} = \frac{1}{2^{11}} \rightarrow n - 1 = 11$$

$$\rightarrow n = 12$$

Resposta: $n = 12$

P 12.10

Aplicando a fórmula do termo geral de uma P.G.:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 \times q^{3-1} \\ a_6 = a_1 \times q^{6-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40 = a_1 \times q^2 \\ -320 = a_1 \times q^5 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira equação:

$$-8 = q^3 \ \rightarrow q = -2$$

Substituindo na primeira equação:

$$40 = a_1 \times 4 \ \rightarrow \ a_1 = 10$$

Usando a fórmula dos 8 primeiros termos de uma P.G.:

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{10((-2)^8 - 1)}{-2 - 1} = \frac{10(256 - 1)}{-3} = \frac{2550}{-3} = -850$$

Resposta: $S_8 = -850$

P 12.11

$a_1 = 1;\ q = \sqrt{2}$ e n $= 12$. Aplicando a fórmula do termo geral de uma P.G.:

$$a_{12} = a_1 \times q^{12-1} = 1 \times \left(\sqrt{2}\right)^{11} = 2^{11/2}$$

Usando a fórmula do produto dos 12 primeiros termos:

$$|P_{12}| = \sqrt{(a_1 \times a_{12})^{12}} = \sqrt{\left(1 \times 2^{11/2}\right)^{12}} = \left(2^{11/2}\right)^6 = 2^{33}.$$

Como a P.G. tem termos positivos, o produto é positivo.

Resposta: $P_{12} = 2^{33}$