Exercícios propostos resolvidos

Capítulo 10 – Trigonometria

P 10.1

a) Vamos usar a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 180° & \leftrightarrow & \pi \\ 30° & \leftrightarrow & x \end{array}$$

$180°x = 30°\pi \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$

b) Vamos usar a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 180° & \leftrightarrow & \pi \\ 120° & \leftrightarrow & x \end{array}$$

$$180°x = 120°\pi \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$$

c) Vamos usar a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 180° & \leftrightarrow & \pi \\ 210° & \leftrightarrow & x \end{array}$$

$$180°x = 210°\pi \Rightarrow x = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\text{rad}$$

d) Vamos usar a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 180° & \leftrightarrow & \pi \\ 300° & \leftrightarrow & x \end{array}$$

$180°x = 300°\pi \Rightarrow x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}\text{rad}$

Respostas: a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{7\pi}{6}$; d) $\frac{5\pi}{3}$

P 10.2

Pela expressão do cálculo de l:

$$l = \frac{\beta°\pi}{180°} \cdot \mathrm{r} = \frac{120°.\pi}{180°} \cdot 8 = \frac{2 \times 3{,}14 \times 8}{3} = 16{,}75$$

Resposta: m(AB) = 16,75 cm

P 10.3

Como os valores de $-1 \leq \cos x \leq 1$, então:

$$-1 \leq 3m-5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 3m \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq m \leq 2$$

Resposta: S = [4/3; 2]

P 10.4

Pela condição de existência da função cossec x, devemos ter:
$\frac{\pi}{4} - x \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $x \neq \frac{\pi}{4} - k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: D(f) = {x $\in \mathbb{R}$/ x $\neq \frac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$}

P 10.5

Como $\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen} x$; $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ e
$\operatorname{sen}(mx+n) = \operatorname{sen}(mx)\cos n + \operatorname{sen} n \cos(mx)$, segue que $\cos(mx)$ e $\operatorname{sen}(mx)$ tem período p= $\frac{2\pi}{m}$. Logo, $f(x) = a + b\operatorname{sen}(mx+n)$ também tem período p= $\frac{2\pi}{m}$.

Resposta: p= $\frac{2\pi}{m}$

P 10.6

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos \quad x = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Fazendo interseção entre as condições acima, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

P 10.7

Como os valores de $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$, então:

$$-10 \leq -10.\,\text{sen}\, x \leq 10$$

Resposta: $y_{max} = 10$ e $y_{min} = -10$

P 10.8

$$A = \frac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1}{\left(\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) + 1}$$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \;\to \cos^2 x = \frac{1}{2} \;\to \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo na expressão acima:

$$A = \frac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1}{\left(\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) + 1} = \frac{\left(\frac{1}{1/2}\right) - 1}{\left(\frac{1/2}{1/2}\right) + 1} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $A = \frac{1}{2}$

P 10.9

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, segue que:

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \;\to\; \cos^2 x = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169} \;\to \cos x = \frac{5}{13}$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} = \frac{\frac{18}{13}}{2} = \frac{9}{13} \;\to \cos x = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{\frac{8}{13}}{2} = \frac{4}{13} \;\to \cos x = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Resposta: $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ e $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

P 10.10

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \;\to\; \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Então,

$$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \;\to \cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = -1 \;\Rightarrow\; x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} /\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$